Памятка для эксперта, проверяющего решения заданий С1–С6 по математике

Эксперт, проверяющий работу, располагает критериями оценивания решений заданий С1–С6, включающими:

1) формулировку задания с развёрнутым ответом;

2) одно из возможных решений задания;

3) содержание критерия.

Следует помнить, что, проверяя решения заданий с развёрнутым ответом, эксперт оценивает математическую грамотность представленного решения. Эксперт не должен предъявлять особых требований к форме записи и к степени подробности решения, но в то же время должен следить за правильностью и обоснованностью математических утверждений, используемых экзаменуемым.

Максимальный балл за задания:

С1 – 2 балла,

С2 – 2 балла,

С3 – 3 балла.

С4 – 3 балла,

С5 – 4 балла,

С6 – 4 балла.

Если экзаменуемый не приступал к задаче, то в протокол ставится «х».

Если же экзаменуемый приступил к выполнению задания (даже если только переписал условие или написал номер задания), то решение должно быть оценено в соответствии с критериями проверки соответствующего задания.

В распечатанные изображения работ эксперт имеет право вносить любые пометки, помогающие объективной оценке решения задания (эти листы больше не сканируются, а подлежат уничтожению в РЦОИ).

По каждой из шести задач эксперт обязательно заносит в протокол одну из меток: «х», «0», «1», «2», «3», «4» в соответствии с образцом написания меток.

Результаты оценивания заносятся в протокол проверки следующим образом:

– баллы по **С1** переносятся в колонку **1** протокола**;**

– баллы по **С2** переносятся в колонку **2** протокола***;***

– баллы по **С3** переносятся в колонку **3** протокола***;***

– баллы по **С4** переносятся в колонку **4** протокола***;***

– баллы по **С5** переносятся в колонку **5** протокола***;***

– баллы по **С6** переносятся в колонку **6** протокола**.**

Оставшиеся колонки протокола не заполняются.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в «Протокол проверки ответов на задания бланка № 2» следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «**Х»**, а не «0».

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $10^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

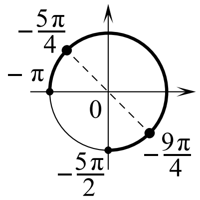
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x}\cdot 5^{\sin x}=2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x};\ 5^{\sin x}=5^{-\cos x};\ \sin x=-\cos x;\ \operatorname{tg}x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

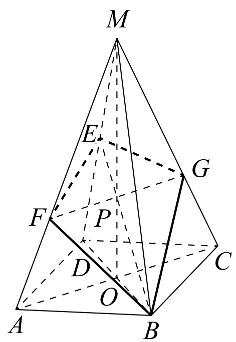
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$



© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{5-x}\dfrac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10,\\ x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)-\log_{5-x}(x-5)^{10}\ge -10;\ \log_{5-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<5-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 4<x<5;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4)\ge 0,\\ 5-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<4,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1;\ x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7}\le 0;\ \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $2 \le x < 7$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $2 \le x < 4$.

Ответ: -3; 0; $[2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 6 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 4 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 10 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 2{,}5.$$

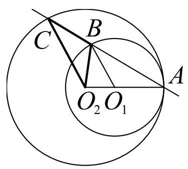


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 40 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 10.$$

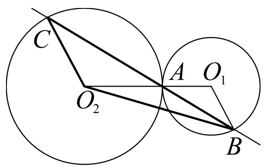


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

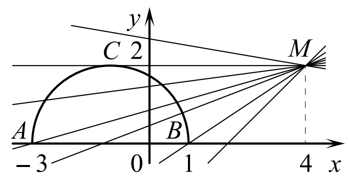
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+1)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4; 2)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, проходит через точки $M(4; 2)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{2}{7}$.

При $0 < -a \le \frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, проходит через точки $M(4; 2)$ и $B(1; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{3}$. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

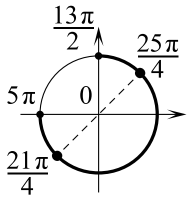
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{\sin x};\ \cos x=\sin x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



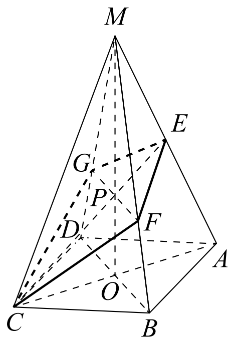
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=24$.

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2,\\ x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -3\le x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\le x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0;$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -3$; $x=0$; $1\le x<4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -3; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=30°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 30°=2\sqrt{3}$, $AC=2O_2A\cdot\cos 30°=3\sqrt{3}$.

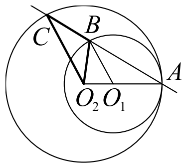


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

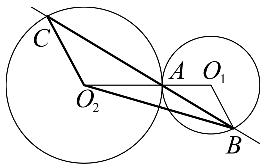


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=5\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

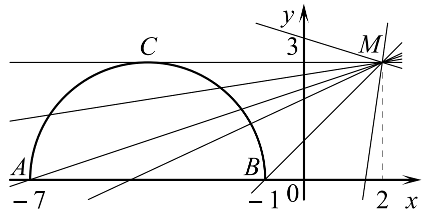
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-7-8x-x^2}=-ax+2a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+4)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-4;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $A(-7;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $0<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1$. При $\frac{1}{3}<-a\le 1$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-1\le a<-\frac{1}{3}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>1$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-1$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

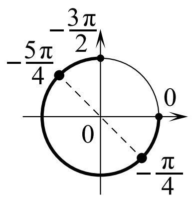
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{-\sin x}\cdot 7^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x}=7^{\cos x};\ -\sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

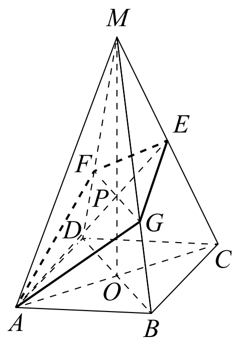


Получим числа: $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G — ребру MB), откуда

$$MF:FD=MG:GB=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $AFEG$ — искомое сечение. Отрезок AE — медиана треугольника MAC, значит,

$$AE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MA^2-MC^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MA^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{AFEG}=\frac{AE\cdot FG}{2}=13\sqrt{2}$.

Ответ: $13\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6,\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)-\log_{4-x}(x-4)^6\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+6\le 1,\\ 3<x<4;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+6\ge 1,\\ x<3,\end{cases}\ \text{откуда } -5\le x<3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-5\le x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2;\ x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\le 0;$$

$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -5$; $x=0$; $1\le x<5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: -5; 0; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=22{,}5^\circ$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=22{,}5^\circ$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 22{,}5^\circ=4\cdot\cos 22{,}5^\circ$, $AC=2O_2A\cdot\cos 22{,}5^\circ=20\cdot\cos 22{,}5^\circ$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=16\cdot\cos 22{,}5^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=80\cdot\cos 22{,}5^\circ\cdot\sin 22{,}5^\circ=20\sqrt{2}.$$

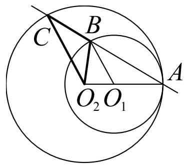


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=24\cdot\cos 22{,}5^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=120\cdot\cos 22{,}5^\circ\cdot\sin 22{,}5^\circ=30\sqrt{2}.$$

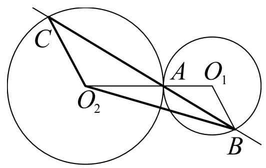


Рис. 2

Ответ: $20\sqrt{2}$ или $30\sqrt{2}$.

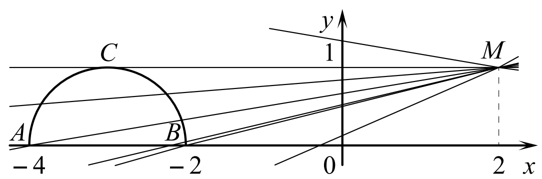
© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax+\sqrt{-8-6x-x^2}=2a+1$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8-6x-x^2}=-ax+2a+1$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-8-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+1$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $A(-4;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{6}$. При $0<-a\le\frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59-10-12-13=24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $20^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

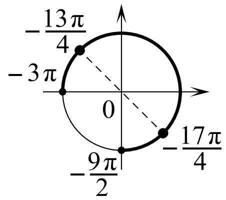
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x};\ 5^{\cos x} = 5^{-\sin x};\ \cos x = -\sin x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{17\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4};\ -\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

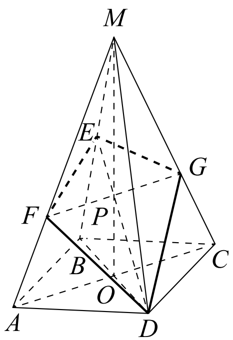
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MB. Отрезок DE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA = MG:GC = MP:PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 10\sqrt{2}.$$



© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $DFEG$ — искомое сечение. Отрезок DE — медиана треугольника MBD, значит,

$$DE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MD^2 - MB^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MD^2}}{2} = 17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали DE и FG четырёхугольника $DFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{DFEG} = \frac{DE \cdot FG}{2} = 85\sqrt{2}$.

Ответ: $85\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x}\dfrac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \le 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4;\ \log_{3-x}(x+7) - \log_{3-x}(x-3)^4 \ge -4;\ \log_{3-x}(x+7) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 3-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \ge 0, \\ 0 < 3-x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x+7 \le 1, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $3 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \ge 0, \\ 3-x > 1; \end{cases} \begin{cases} x+7 \ge 1, \\ x < 2, \end{cases} \text{ откуда } -6 \le x < 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6 \le x < 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \le 5;\ x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2}{x-3} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x^2}{x-3} \le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+6)}{x-3} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -6$; $x = 0$; $1 \le x < 3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-6$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -6; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A\cdot\cos 30° = 3\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A\cdot\cos 30° = 9\sqrt{3}$.

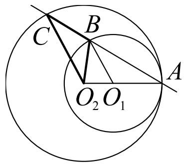


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

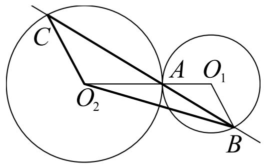


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 12\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2} = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

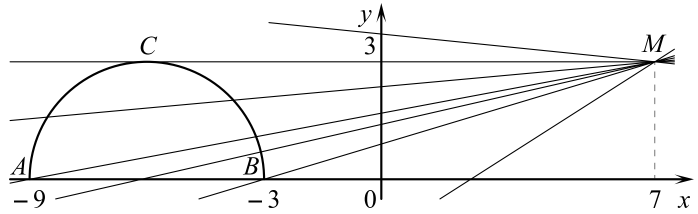
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-27-12x-x^2}=7a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-27-12x-x^2}=-ax+7a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-27-12x-x^2}$ и $g(x)=-ax+7a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+6)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-6;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(7;3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $A(-9;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{3}{16}$.

При $0<-a\le\frac{3}{16}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $B(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{3}{10}$. При $\frac{3}{16}<-a\le\frac{3}{10}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{3}{10}\le a<-\frac{3}{16}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{3}{10}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10};-\frac{3}{16}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{3}{10}$ и/или включением точки $a=-\frac{3}{16}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 8, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47-8-9-10=20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20. Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

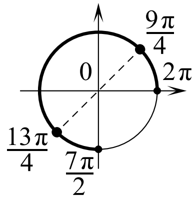
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x} \cdot 4^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x};\ 4^{\sin x} = 4^{\cos x};\ \sin x = \cos x;\ \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

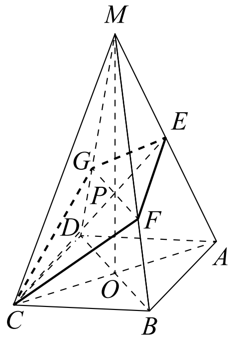
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF : FB = MG : GD = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3} BD = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 3\sqrt{2}.$$



© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = \frac{15}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{CFEG} = \frac{CE \cdot FG}{2} = \frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{x+5}{(x-6)^{12}} \geq -12, \\ x^3 + 7x^2 + \dfrac{30x^2 + 7x - 42}{x-6} \leq 7. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x} \frac{x+5}{(x-6)^{12}} \geq -12;\ \log_{6-x}(x+5) - \log_{6-x}(x-6)^{12} \geq -12;\ \log_{6-x}(x+5) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 6 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x+5) \geq 0, \\ 0 < 6 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x + 5 \leq 1, \\ 5 < x < 6; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $6 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{6-x}(x+5) \geq 0, \\ 6 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x + 5 \geq 1, \\ x < 5, \end{cases} \text{ откуда } -4 \leq x < 5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4 \leq x < 5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 7x^2 + \frac{30x^2 + 7x - 42}{x-6} \leq 7;\ x^3 + 7x^2 + \frac{30x^2}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 12x^2}{x-6} \leq 0;\ \frac{x^2(x-3)(x+4)}{x-6} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -4$; $x = 0$; $3 \le x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $x = 0$; $3 \le x < 5$.

Ответ: -4; 0; $[3; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 22{,}5° = 2 \cdot \cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 22{,}5° = 14 \cdot \cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 12 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 42 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = \frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

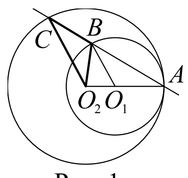


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 56 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 14\sqrt{2}.$$

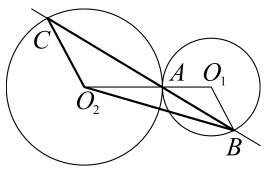


Рис. 2

Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ или $14\sqrt{2}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

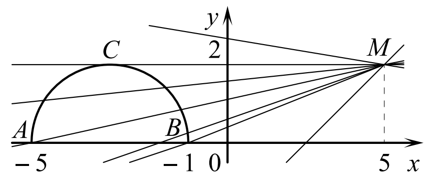
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-5-6x-x^2} = -ax + 5a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-5-6x-x^2}$ и $g(x) = -ax + 5a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-3; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(5; 2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, проходит через точки $M(5; 2)$ и $A(-5; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{5}$.

При $0 < -a \le \frac{1}{5}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением

$y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $\frac{1}{5}<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{3}\le a<-\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{5}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

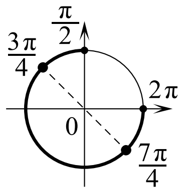
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\cos x}\cdot 7^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x};\ 7^{\cos x}=7^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

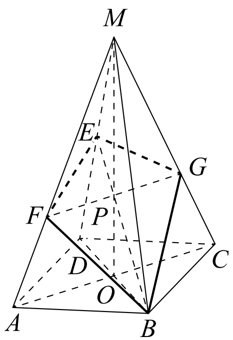
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда



$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=\frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{7-x}\dfrac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8,\\ x^3+6x^2+\dfrac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{7-x}\frac{x+3}{(x-7)^8}\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)-\log_{7-x}(x-7)^8\ge -8;\ \log_{7-x}(x+3)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<7-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 0<7-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+3\le 1,\\ 6<x<7;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $7-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{7-x}(x+3)\ge 0,\\ 7-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+3\ge 1,\\ x<6,\end{cases}\ \text{откуда } -2\le x<6.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2\le x<6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{40x^2+3x-24}{x-8}\le 3;\ x^3+6x^2+\frac{40x^2}{x-8}\le 0;$$

$$\frac{x^4-2x^3-8x^2}{x-8}\le 0;\ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -2$; $x=0$; $4\le x<8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-2$; $x=0$; $4\le x<6$.

Ответ: -2; 0; $[4;6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=15°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 15°=10\cdot\cos 15°$, $AC=2O_2A\cdot\cos 15°=16\cdot\cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=6\cdot\cos 15°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=24\cdot\cos 15°\cdot\sin 15°=6.$$

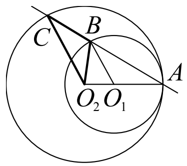


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=26\cdot\cos 15°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=104\cdot\cos 15°\cdot\sin 15°=26.$$

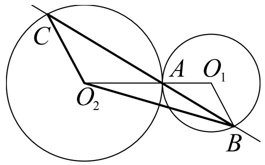


Рис. 2

Ответ: 6 или 26.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

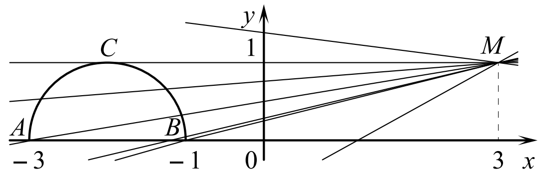
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-3-4x-x^2}=3a+1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-3-4x-x^2}=-ax+3a+1$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-3-4x-x^2}$ и $g(x)=-ax+3a+1$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $A(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{6}$. При $0<-a\le\frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет две общие

точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29-5-6-8=10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x}$.

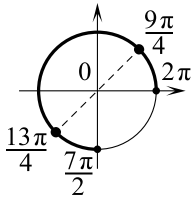
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x}\cdot 4^{\sin x}=3^{\sin x}\cdot 4^{\cos x};\ 4^{\sin x}=4^{\cos x};\ \sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



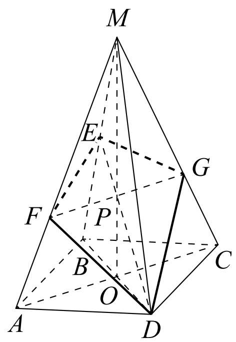
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MB. Отрезок DE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=10\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $DFEG$ — искомое сечение. Отрезок DE — медиана треугольника MBD, значит,

$$DE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MD^2-MB^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MD^2}}{2}=17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали DE и FG четырёхугольника $DFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{DFEG}=\frac{DE\cdot FG}{2}=85\sqrt{2}.$$

Ответ: $85\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6,\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)-\log_{4-x}(x-4)^6\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+6\le 1,\\ 3<x<4;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+6\ge 1,\\ x<3,\end{cases}\ \text{откуда } -5\le x<3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-5\le x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2;\ x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\le 0;$$

$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -5$; $x=0$; $1\le x<5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: -5; 0; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=30°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 30°=3\sqrt{3}$, $AC=2O_2A\cdot\cos 30°=9\sqrt{3}$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

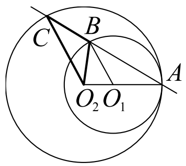


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=12\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=27\sqrt{3}.$$

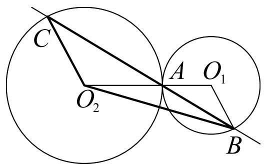


Рис. 2

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

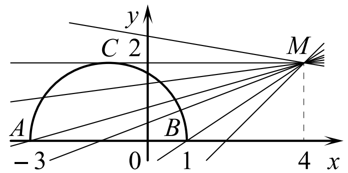
$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=-ax+4a+2$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{2^2-(x+1)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4;2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4;2)$ и $A(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{7}$.

При $0<-a\le\frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4;2)$ и $B(1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{3}$. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 8, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47-8-9-10=20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20. Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

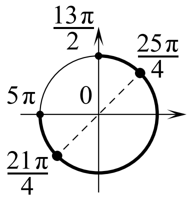
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x};\ 5^{\cos x} = 5^{\sin x};\ \cos x = \sin x;\ \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.



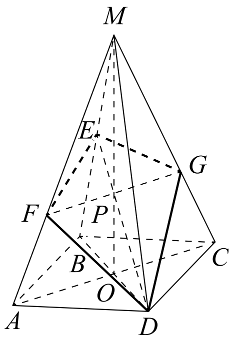
Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MB. Отрезок DE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 10\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $DFEG$ — искомое сечение. Отрезок DE — медиана треугольника MBD, значит,

$$DE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MD^2 - MB^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MD^2}}{2} = 17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали DE и FG четырёхугольника $DFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{DFEG} = \frac{DE \cdot FG}{2} = 85\sqrt{2}.$$

Ответ: $85\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \le 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10;\ \log_{5-x}(x+4) - \log_{5-x}(x-5)^{10} \ge -10;\ \log_{5-x}(x+4) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \ge 0, \\ 0 < 5 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x+4 \le 1, \\ 4 < x < 5; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $5 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \ge 0, \\ 5 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x+4 \ge 1, \\ x < 4, \end{cases} \text{ откуда } -3 \le x < 4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3 \le x < 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2 + x - 7}{x-7} \le 1;\ x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 6x^2}{x-7} \le 0;\ \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $2 \le x < 7$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $2 \le x < 4$.

Ответ: $-3;\ 0;\ [2;4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = \sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

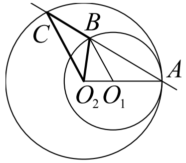


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 5\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

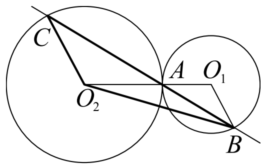


Рис. 2

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

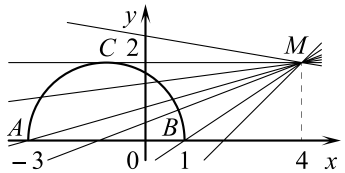
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+1)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4; 2)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, проходит через точки $M(4; 2)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{2}{7}$.

При $0 < -a \le \frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 4a + 2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4;2)$ и $B(1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{3}$. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{2}{3}$, $a=-\frac{2}{7}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

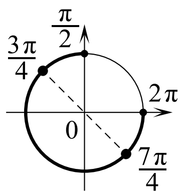
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\cos x}\cdot 7^{\cos x}=2^{\cos x}\cdot 7^{-\sin x};\ 7^{\cos x}=7^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg}x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

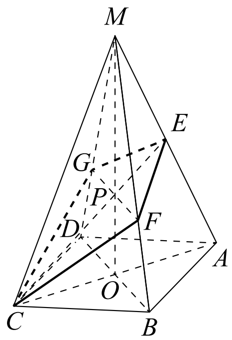
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда



$$MF:FB=MG:GD=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=3\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MC^2-MA^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MC^2}}{2}=\frac{15}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG}=\frac{CE\cdot FG}{2}=\frac{45\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12,\\ x^3+7x^2+\dfrac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x}\frac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)-\log_{6-x}(x-6)^{12}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<6-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 0<6-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+5\le 1,\\ 5<x<6;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $6-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 6-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+5\ge 1,\\ x<5,\end{cases}\ \text{откуда } -4\le x<5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4\le x<5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+7x^2+\frac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7;\ x^3+7x^2+\frac{30x^2}{x-6}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-12x^2}{x-6}\le 0;\ \frac{x^2(x-3)(x+4)}{x-6}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -4$; $x = 0$; $3 \le x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $x = 0$; $3 \le x < 5$.

Ответ: -4; 0; $[3;5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 9\sqrt{3}$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

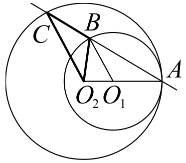


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 12\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 27\sqrt{3}.$$

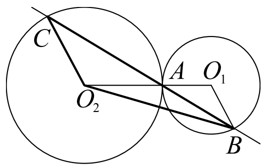


Рис. 2

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ или $27\sqrt{3}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

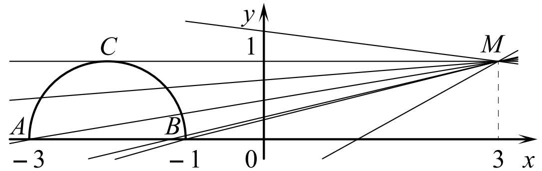
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-3-4x-x^2} = -ax + 3a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-3-4x-x^2}$ и $g(x) = -ax + 3a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $A(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$. При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, имеет две общие

точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

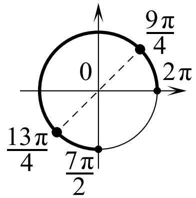
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x} \cdot 4^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x};\ 4^{\sin x} = 4^{\cos x};\ \sin x = \cos x;\ \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

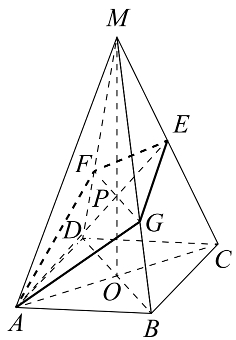
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G — ребру MB), откуда



$$MF : FD = MG : GB = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3} BD = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $AFEG$ — искомое сечение. Отрезок AE — медиана треугольника MAC, значит,

$$AE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MA^2 - MC^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MA^2}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{AFEG} = \frac{AE \cdot FG}{2} = 13\sqrt{2}.$$

Ответ: $13\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \le 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10;\ \log_{5-x}(x+4) - \log_{5-x}(x-5)^{10} \ge -10;\ \log_{5-x}(x+4) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \ge 0, \\ 0 < 5 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x + 4 \le 1, \\ 4 < x < 5; \end{cases} \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \ge 0, \\ 5 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x + 4 \ge 1, \\ x < 4, \end{cases} \text{откуда } -3 \le x < 4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3 \le x < 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2 + x - 7}{x-7} \le 1;\ x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 6x^2}{x-7} \le 0;\ \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $2 \le x < 7$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $2 \le x < 4$.

Ответ: $-3;\ 0;\ [2;4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 22{,}5° = 4 \cdot \cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 22{,}5° = 20 \cdot \cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 16 \cdot \cos 22{,}5°$.

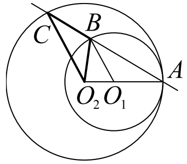


Рис. 1

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 80 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 20\sqrt{2}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 24 \cdot \cos 22{,}5°$.

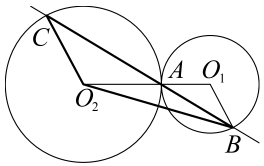


Рис. 2

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 120 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 30\sqrt{2}.$$

Ответ: $20\sqrt{2}$ или $30\sqrt{2}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

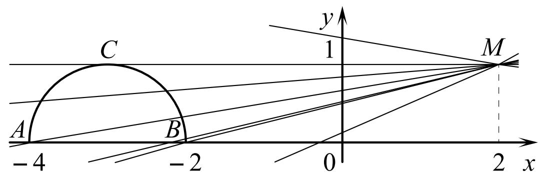
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-8 - 6x - x^2} = 2a + 1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8 - 6x - x^2} = -ax + 2a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-8 - 6x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 2a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $A(-4;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$.

При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 1$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6} < -a \le \frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4} \le a < -\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a > \frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{6}$, $a = 0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a = -\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a = -\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{6}$, $a = 0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = -\frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{6}$ или $a = 0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59 - 10 - 12 - 13 = 24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

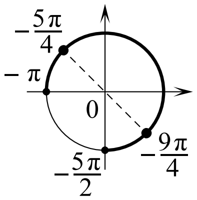
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x};\ 5^{\sin x} = 5^{-\cos x};\ \sin x = -\cos x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

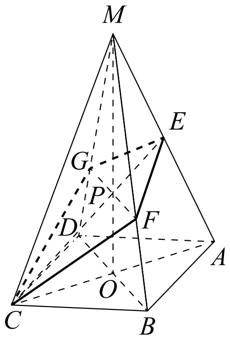
Получим числа: $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2 : 1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF : FB = MG : GD = MP : PO = 2 : 1;$$

$$FG = \frac{2}{3} BD = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 3\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = \frac{15}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG} = \frac{CE \cdot FG}{2} = \frac{45\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{45\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^2} \ge -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \le 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \ge -2;\ \log_{3-x}(x+4) - \log_{3-x}(x-3)^2 \ge -2;\ \log_{3-x}(x+4) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 3 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4) \ge 0, \\ 0 < 3 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x + 4 \le 1, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $3 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4) \ge 0, \\ 3 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x + 4 \ge 1, \\ x < 2, \end{cases} \text{ откуда } -3 \le x < 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3 \le x < 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \le 3;\ x^3 + 6x^2 + \frac{21x^2}{x-4} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{x-4} \le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x = 0$; $1 \le x < 4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $x = 0$; $1 \le x < 2$.

Ответ: -3; 0; $[1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 22{,}5° = 2 \cdot \cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 22{,}5° = 14 \cdot \cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 12 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 42 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = \frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

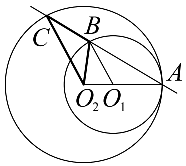


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} =$$
$$= 56 \cdot \cos 22{,}5° \cdot \sin 22{,}5° = 14\sqrt{2}.$$

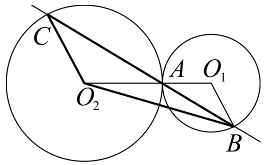


Рис. 2

Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ или $14\sqrt{2}$.

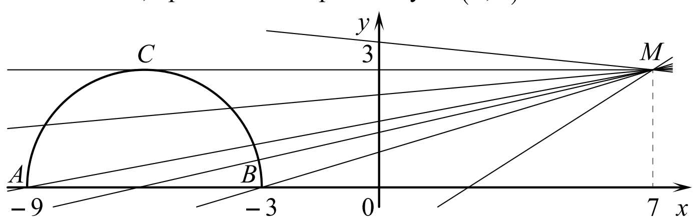
© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-27 - 12x - x^2} = -ax + 7a + 3$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-27 - 12x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 7a + 3$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{3^2 - (x+6)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-6; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(7; 3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, проходит через точки $M(7; 3)$ и $A(-9; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{3}{16}$.

При $0 < -a \le \frac{3}{16}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $B(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{3}{10}$. При $\frac{3}{16} < -a \le \frac{3}{10}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{3}{10} \le a < -\frac{3}{16}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a > \frac{3}{10}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10}; -\frac{3}{16}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{3}{10}$, $a = -\frac{3}{16}$, $a = 0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a = -\frac{3}{10}$ и/или включением точки $a = -\frac{3}{16}$	3
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{3}{10}$, $a = -\frac{3}{16}$, $a = 0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = -\frac{3}{10}$, $a = -\frac{3}{16}$ или $a = 0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52 - 9 - 10 - 11 = 22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

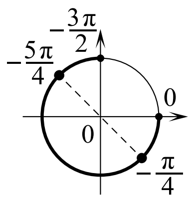
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{-\sin x} \cdot 7^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x} = 7^{\cos x};\ -\sin x = \cos x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

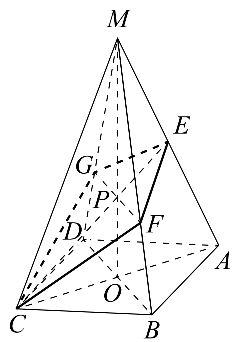
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда



$$MF:FB = MG:GD = MP:PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG} = \frac{CE \cdot FG}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \le 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x} \frac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4;\ \log_{3-x}(x+7) - \log_{3-x}(x-3)^4 \ge -4;\ \log_{3-x}(x+7) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 3 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \ge 0, \\ 0 < 3-x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x+7 \le 1, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $3 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \ge 0, \\ 3-x > 1; \end{cases} \begin{cases} x+7 \ge 1, \\ x < 2, \end{cases} \text{ откуда } -6 \le x < 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6 \le x < 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \le 5;\ x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2}{x-3} \le 0;$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x^2}{x-3} \le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+6)}{x-3} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -6$; $x = 0$; $1 \le x < 3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-6$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -6; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 1 и 7 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 22{,}5°$, откуда $AB = 2O_1A\cdot\cos 22{,}5° = 2\cdot\cos 22{,}5°$, $AC = 2O_2A\cdot\cos 22{,}5° = 14\cdot\cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 12\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2} =$$
$$= 42\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5° = \frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

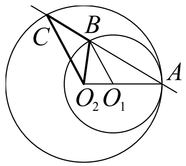


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2} =$$
$$= 56\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5° = 14\sqrt{2}.$$

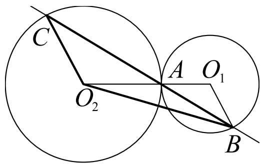


Рис. 2

Ответ: $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ или $14\sqrt{2}$.

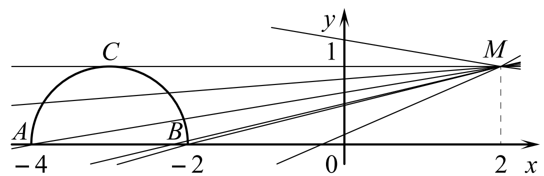
© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax + \sqrt{-8-6x-x^2} = 2a+1$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8-6x-x^2} = -ax+2a+1$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-8-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+1$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $A(-4;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{6}$.

При $0<-a\le\frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 8, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47-8-9-10=20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20. Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

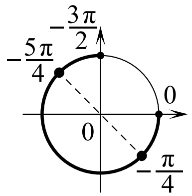
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{-\sin x}\cdot 7^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x};\ 7^{-\sin x}=7^{\cos x};\ -\sin x=\cos x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

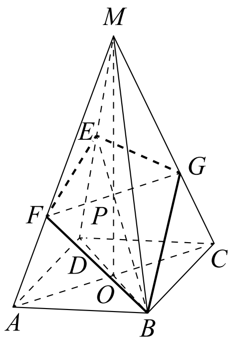
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=2\sqrt{2}.$$



© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12,\\ x^3+7x^2+\dfrac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{6-x}\frac{x+5}{(x-6)^{12}}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)-\log_{6-x}(x-6)^{12}\ge -12;\ \log_{6-x}(x+5)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<6-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 0<6-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+5\le 1,\\ 5<x<6;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $6-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{6-x}(x+5)\ge 0,\\ 6-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+5\ge 1,\\ x<5,\end{cases}\ \text{откуда } -4\le x<5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-4\le x<5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+7x^2+\frac{30x^2+7x-42}{x-6}\le 7;\ x^3+7x^2+\frac{30x^2}{x-6}\le 0;$$

$$\frac{x^4+x^3-12x^2}{x-6}\le 0;\ \frac{x^2(x-3)(x+4)}{x-6}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -4$; $x = 0$; $3 \le x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $x = 0$; $3 \le x < 5$.

Ответ: -4; 0; $[3; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 16 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 6 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 24 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 6.$$

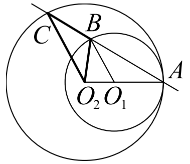


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 26 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 104 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 26.$$

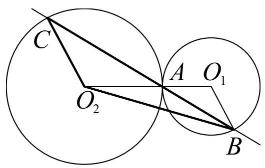


Рис. 2

Ответ: 6 или 26.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

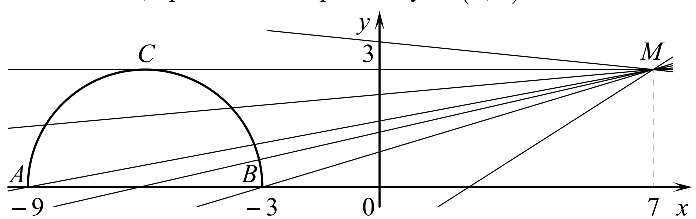
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-27 - 12x - x^2} = -ax + 7a + 3$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-27 - 12x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 7a + 3$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{3^2 - (x+6)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-6; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(7; 3)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 7a + 3$, проходит через точки $M(7; 3)$ и $A(-9; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{3}{16}$.

При $0<-a\le\frac{3}{16}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, проходит через точки $M(7;3)$ и $B(-3;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{3}{10}$. При $\frac{3}{16}<-a\le\frac{3}{10}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+7a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{3}{10}\le a<-\frac{3}{16}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{3}{10}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{3}{10};-\frac{3}{16}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{3}{10}$ и/или включением точки $a=-\frac{3}{16}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{3}{10}$, $a=-\frac{3}{16}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29-5-6-8=10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

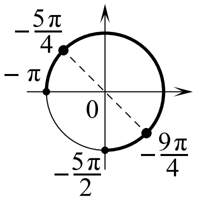
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x};\ 5^{\sin x} = 5^{-\cos x};\ \sin x = -\cos x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.



Получим числа: $-\dfrac{9\pi}{4}$; $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{9\pi}{4}$; $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

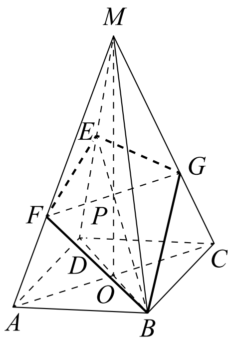
C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 2\sqrt{2}.$$



© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{x+3}{(x-7)^8} \geq -8, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \leq 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{7-x} \frac{x+3}{(x-7)^8} \geq -8;\ \log_{7-x}(x+3) - \log_{7-x}(x-7)^8 \geq -8;\ \log_{7-x}(x+3) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 7-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+3) \geq 0, \\ 0 < 7-x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x+3 \leq 1, \\ 6 < x < 7; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $7 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+3) \geq 0, \\ 7-x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 \geq 1, \\ x < 6, \end{cases} \text{ откуда } -2 \leq x < 6.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2 \leq x < 6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \leq 3;\ x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2}{x-8} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 8x^2}{x-8} \leq 0;\ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -2$; $x = 0$; $4 \le x < 8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $4 \le x < 6$.

Ответ: -2; 0; $[4; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$.

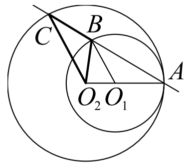


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = \sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 5\sqrt{3}$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

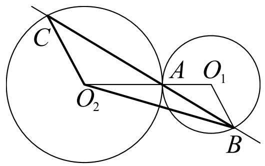


Рис. 2

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

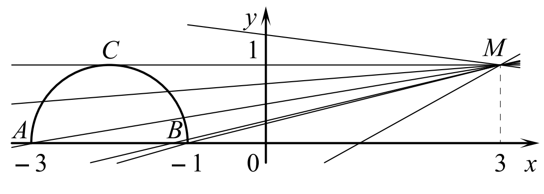
$$ax + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = 3a + 1$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-3 - 4x - x^2} = -ax + 3a + 1$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-3 - 4x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 3a + 1$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{1^2 - (x+2)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-2; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(3; 1)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, проходит через точки $M(3; 1)$ и $A(-3; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{6}$. При $0 < -a \le \frac{1}{6}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 3a + 1$, имеет две общие

точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, проходит через точки $M(3;1)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{4}$. При $\frac{1}{6}<-a\le\frac{1}{4}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+3a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{4}\le a<-\frac{1}{6}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{4}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{4}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{6}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{6}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

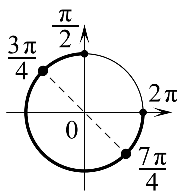
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2^{\cos x} \cdot 7^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x};\ 7^{\cos x} = 7^{-\sin x};\ \cos x = -\sin x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

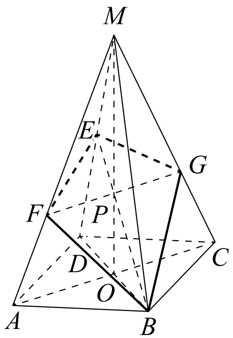
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда



$$MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{x+3}{(x-7)^8} \geq -8, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \leq 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{7-x} \frac{x+3}{(x-7)^8} \geq -8;\ \log_{7-x}(x+3) - \log_{7-x}(x-7)^8 \geq -8;\ \log_{7-x}(x+3) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 7 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+3) \geq 0, \\ 0 < 7 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x + 3 \leq 1, \\ 6 < x < 7; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $7 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+3) \geq 0, \\ 7 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x + 3 \geq 1, \\ x < 6, \end{cases} \text{ откуда } -2 \leq x < 6.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2 \leq x < 6$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \leq 3;\ x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2}{x-8} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 8x^2}{x-8} \leq 0;\ \frac{x^2(x-4)(x+2)}{x-8} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -2$; $x = 0$; $4 \le x < 8$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $4 \le x < 6$.

Ответ: -2; 0; $[4; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 6 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 4 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 10 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 2{,}5.$$

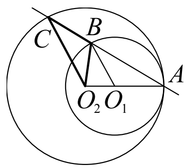


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2}{2} = 40 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 10.$$

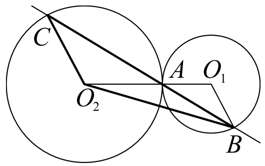


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

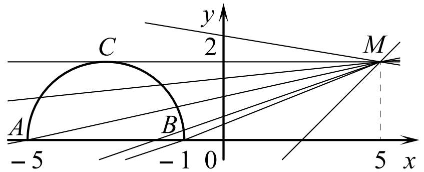
$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-5 - 6x - x^2} = -ax + 5a + 2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{-5 - 6x - x^2}$ и $g(x) = -ax + 5a + 2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{2^2 - (x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-3; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(5; 2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, проходит через точки $M(5; 2)$ и $A(-5; 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{1}{5}$.

При $0 < -a \le \frac{1}{5}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 5a + 2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $\frac{1}{5}<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{3}\le a<-\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{5}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-9-11=14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

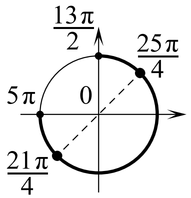
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{\sin x};\ \cos x=\sin x;\ \operatorname{tg} x=1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



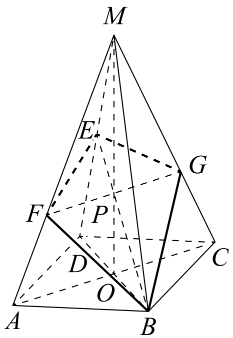
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\frac{13\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.



Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=\frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\geq -2,\\ x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\leq 3.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\geq -2;\ \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\geq -2;\ \log_{3-x}(x+4)\geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\geq 0,\\ 0<3-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+4\leq 1,\\ 2<x<3;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\geq 0,\\ 3-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+4\geq 1,\\ x<2,\end{cases}\ \text{откуда } -3\leq x<2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\leq x<2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\leq 3;\ x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\leq 0;$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\leq 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\leq -3$; $x=0$; $1\leq x<4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -3; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 2 и 10 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 22{,}5°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=22{,}5°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos 22{,}5°=4\cdot\cos 22{,}5°$, $AC=2O_2A\cdot\cos 22{,}5°=20\cdot\cos 22{,}5°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=16\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=80\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=20\sqrt{2}.$$

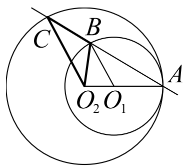


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=24\cdot\cos 22{,}5°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=120\cdot\cos 22{,}5°\cdot\sin 22{,}5°=30\sqrt{2}.$$

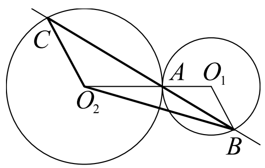


Рис. 2

Ответ: $20\sqrt{2}$ или $30\sqrt{2}$.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

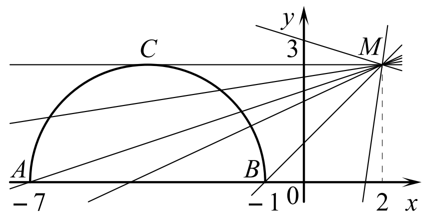
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-7-8x-x^2}=-ax+2a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+4)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-4;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;3)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $A(-7;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$.

При $0<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1$. При $\frac{1}{3}<-a\le 1$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-1\le a<-\frac{1}{3}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>1$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-1$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59-10-12-13=24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $20^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

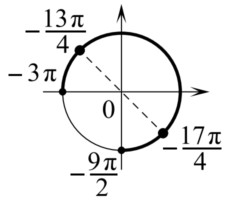
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x};\ 5^{\cos x}=5^{-\sin x};\ \cos x=-\sin x;\ \operatorname{tg} x=-1,$$

откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.



Получим числа: $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

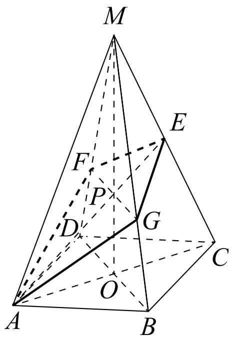
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G — ребру MB), откуда



$$MF:FD=MG:GB=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $AFEG$ — искомое сечение. Отрезок AE — медиана треугольника MAC, значит,

$$AE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MA^2-MC^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MA^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{AFEG}=\frac{AE\cdot FG}{2}=13\sqrt{2}.$$

Ответ: $13\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6,\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)-\log_{4-x}(x-4)^6\ge -6;\ \log_{4-x}(x+6)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases}\ \begin{cases}0<x+6\le 1,\\ 3<x<4;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+6)\ge 0,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x+6\ge 1,\\ x<3,\end{cases}\ \text{откуда } -5\le x<3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-5\le x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2;\ x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\le 0;$$

$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -5$; $x=0$; $1\le x<5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-5$; $x=0$; $1\le x<3$.

Ответ: -5; 0; $[1;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=15^\circ$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=15^\circ$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos15^\circ=10\cdot\cos15^\circ$, $AC=2O_2A\cdot\cos15^\circ=16\cdot\cos15^\circ$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=6\cdot\cos15^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=24\cdot\cos15^\circ\cdot\sin15^\circ=6.$$

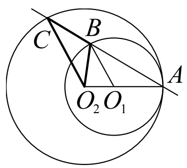


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=26\cdot\cos15^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=104\cdot\cos15^\circ\cdot\sin15^\circ=26.$$

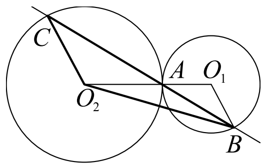


Рис. 2

Ответ: 6 или 26.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

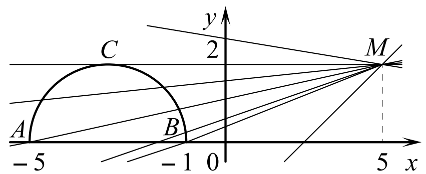
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax+\sqrt{-5-6x-x^2}=5a+2$$
имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-5-6x-x^2}=-ax+5a+2$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-5-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+5a+2$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{2^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(5;2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $A(-5;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{5}$.

При $0<-a\le\frac{1}{5}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, проходит через точки $M(5;2)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$. При $\frac{1}{5}<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+5a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{1}{3}\le a<-\frac{1}{5}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{1}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-\frac{1}{3}$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{5}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{1}{3}$, $a=-\frac{1}{5}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $20^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

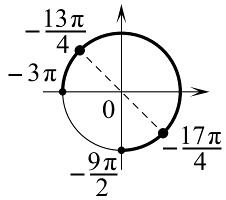
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x};\ 5^{\cos x} = 5^{-\sin x};\ \cos x = -\sin x;\ \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.



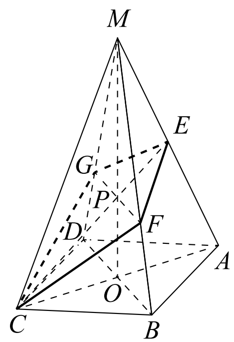
Получим числа: $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MA. Отрезок CE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MB, G — ребру MD), откуда

$$MF : FB = MG : GD = MP : PO = 2:1;$$

$$FG = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок CE — медиана треугольника MAC, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали CE и FG четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG} = \frac{CE \cdot FG}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+7}{(x-3)^4} \geq -4, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x} \frac{x+7}{(x-3)^4} \geq -4;\ \log_{3-x}(x+7) - \log_{3-x}(x-3)^4 \geq -4;\ \log_{3-x}(x+7) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 3 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \geq 0, \\ 0 < 3 - x < 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x+7 \leq 1, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $3 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+7) \geq 0, \\ 3 - x > 1; \end{cases} \begin{cases} x+7 \geq 1, \\ x < 2, \end{cases} \text{ откуда } -6 \leq x < 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-6 \leq x < 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2 + 5x - 15}{x-3} \leq 5;\ x^3 + 8x^2 + \frac{18x^2}{x-3} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x^2}{x-3} \leq 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+6)}{x-3} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -6$; $x = 0$; $1 \leq x < 3$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-6$; $x=0$; $1\le x<2$.

Ответ: -6; 0; $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=15°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=15°$, откуда $AB=2O_1A\cdot\cos15°=6\cdot\cos15°$, $AC=2O_2A\cdot\cos15°=10\cdot\cos15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC=AC-AB=4\cdot\cos15°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=10\cdot\cos15°\cdot\sin15°=2{,}5.$$

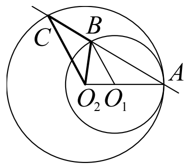


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC=AC+AB=16\cdot\cos15°$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=$$
$$=40\cdot\cos15°\cdot\sin15°=10.$$

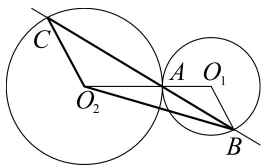


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

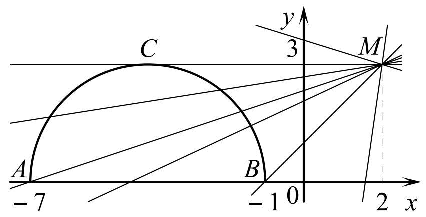
$$ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{-7-8x-x^2}=-ax+2a+3$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-7-8x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+3$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3^2-(x+4)^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(-4;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;3)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $A(-7;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{1}{3}$.

При $0<-a\le\frac{1}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет две

общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, проходит через точки $M(2;3)$ и $B(-1;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1$. При $\frac{1}{3}<-a\le 1$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-1\le a<-\frac{1}{3}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>1$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a=-1$ и/или включением точки $a=-\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a=0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-1$, $a=-\frac{1}{3}$ или $a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 29.

© 2013 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 5 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{29}{5}$, то есть 5. Кроме того, числа 6 и 8 меньше, чем сумма двух чисел 5, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $29-5-6-8=10$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 5, оставшиеся задуманные числа — это 5 и 5 или 10. Для задуманных чисел 5, 5, 5, 6, 8 и 5, 6, 8, 10 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 5, 5, 5, 6, 8 или 5, 6, 8, 10.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4