

**5 класс**

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 5.1. Если в комнату войдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате увеличится в 4 раза, а если вместо нее войдет папа — суммарный возраст увеличится в 5 раз. Во сколько раз увеличится суммарный возраст, если в комнату войдут папа с мамой?
- 5.2. За столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). У них спросили, кого среди них больше. Пятеро сказали: «Рыцарей», трое сказали: «Лжецов», а двое сказали: «Поровну». Сколько рыцарей могло быть среди сидящих за столом?
- 5.3. Можно ли в квадрате  $5 \times 5$  покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки было ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.
- 5.4. Петя задумал четырехзначное число, а затем для каждого двух цифр задуманного числа записал их сумму. В итоге он получил 6 чисел. Могла ли сумма этих шести чисел равняться 71?
- 5.5. В первенстве России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все они при этом набрали разное число очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

**5 класс**

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 5.1. Если в комнату войдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате увеличится в 4 раза, а если вместо нее войдет папа — суммарный возраст увеличится в 5 раз. Во сколько раз увеличится суммарный возраст, если в комнату войдут папа с мамой?
- 5.2. За столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). У них спросили, кого среди них больше. Пятеро сказали: «Рыцарей», трое сказали: «Лжецов», а двое сказали: «Поровну». Сколько рыцарей могло быть среди сидящих за столом?
- 5.3. Можно ли в квадрате  $5 \times 5$  покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки было ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.
- 5.4. Петя задумал четырехзначное число, а затем для каждого двух цифр задуманного числа записал их сумму. В итоге он получил 6 чисел. Могла ли сумма этих шести чисел равняться 71?
- 5.5. В первенстве России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все они при этом набрали разное число очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

## 6 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 6.1. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 11 баранок также стоят дороже 100 рублей. Правда ли, что 1 калач и 3 баранки стоят дороже 50 рублей?
- 6.2. У Олега есть семь прямоугольников размерами  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$ ,  $1 \times 4$ ,  $1 \times 5$ ,  $1 \times 6$  и  $1 \times 7$ . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра.
- 6.3. Вася, Петя, Миша и Толя вскладчину купили радиоуправляемый самолет, причем каждый из них заплатил целое число рублей. У ребят спросили, сколько они потратили денег.
- Вася сказал: «Я заплатил ровно четверть цены самолета.»
- Петя сказал: «Я заплатил на 35 рублей больше Миши.»
- Толя сказал: «Я заплатил на 50 рублей меньше Васи.»
- Докажите, что кто-то из ребят ошибся в подсчетах.
- 6.4. Существует ли набор из 4 гирь такой, что с их помощью можно взвесить на чашечных весах любое целое количество килограммов от 10 до 24? Гири можно ставить на обе чашки весов.
- 6.5. За круглым столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду), причем известно, что среди них есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей лжец, а другой — рыцарь»?

## 6 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 6.1. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 11 баранок также стоят дороже 100 рублей. Правда ли, что 1 калач и 3 баранки стоят дороже 50 рублей?
- 6.2. У Олега есть семь прямоугольников размерами  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$ ,  $1 \times 4$ ,  $1 \times 5$ ,  $1 \times 6$  и  $1 \times 7$ . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра.
- 6.3. Вася, Петя, Миша и Толя вскладчину купили радиоуправляемый самолет, причем каждый из них заплатил целое число рублей. У ребят спросили, сколько они потратили денег.
- Вася сказал: «Я заплатил ровно четверть цены самолета.»
- Петя сказал: «Я заплатил на 35 рублей больше Миши.»
- Толя сказал: «Я заплатил на 50 рублей меньше Васи.»
- Докажите, что кто-то из ребят ошибся в подсчетах.
- 6.4. Существует ли набор из 4 гирь такой, что с их помощью можно взвесить на чашечных весах любое целое количество килограммов от 10 до 24? Гири можно ставить на обе чашки весов.
- 6.5. За круглым столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду), причем известно, что среди них есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей лжец, а другой — рыцарь»?

## 7 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 7.1. На доске написаны две дроби, сумма которых равна 1. Из числителя и знаменателя первой дроби вычли одно и то же число и полученную дробь записали вместо первой. Оказалось, что сумма написанных дробей стала равняться  $\frac{5}{6}$ . Покажите, как такое могло получиться.
- 7.2. У Олега есть семь прямоугольников размером  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$ ,  $1 \times 4$ ,  $1 \times 5$ ,  $1 \times 6$  и  $1 \times 7$ . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинакового периметра, но разной площади.
- 7.3. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?
- 7.4. Четырехзначное число  $N$ , не все цифры которого одинаковы, умножили на каждую из его цифр. Могло ли в результате получиться натуральное число, которое делится на 1111?
- 7.5. В пустую комнату по очереди зашли 10 человек — лжецов и рыцарей. Каждый из них, заходя в комнату, подсчитывал количество лжецов и рыцарей в комнате, включая себя, записывал на листке некоторое утверждение и клал листок на стол. Известно, что все утверждения рыцарей были правильными, лжецов — неправильными, а в результате на столе оказалось 10 листков бумаги, на которых было написано:

«Сейчас в комнате 1 лжец.»

«Сейчас в комнате 2 лжеца.»

«Сейчас в комнате 3 лжеца.»

⋮

«Сейчас в комнате 10 лжецов.»

Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

## 7 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 7.1. На доске написаны две дроби, сумма которых равна 1. Из числителя и знаменателя первой дроби вычли одно и то же число и полученную дробь записали вместо первой. Оказалось, что сумма написанных дробей стала равняться  $\frac{5}{6}$ . Покажите, как такое могло получиться.
- 7.2. У Олега есть семь прямоугольников размером  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$ ,  $1 \times 4$ ,  $1 \times 5$ ,  $1 \times 6$  и  $1 \times 7$ . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинакового периметра, но разной площади.
- 7.3. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?
- 7.4. Четырехзначное число  $N$ , не все цифры которого одинаковы, умножили на каждую из его цифр. Могло ли в результате получиться натуральное число, которое делится на 1111?
- 7.5. В пустую комнату по очереди зашли 10 человек — лжецов и рыцарей. Каждый из них, заходя в комнату, подсчитывал количество лжецов и рыцарей в комнате, включая себя, записывал на листке некоторое утверждение и клал листок на стол. Известно, что все утверждения рыцарей были правильными, лжецов — неправильными, а в результате на столе оказалось 10 листков бумаги, на которых было написано:

«Сейчас в комнате 1 лжец.»

«Сейчас в комнате 2 лжеца.»

«Сейчас в комнате 3 лжеца.»

⋮

«Сейчас в комнате 10 лжецов.»

Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

## 8 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 8.1. Найдите какое-нибудь натуральное число  $N$  такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от  $N$ , то получится 2016.
- 8.2. Самый быстрый бегун в классе бежит на 0,1 м/с быстрее второго, на 0,2 м/с быстрее третьего и на 0,3 м/с быстрее четвертого. Для эстафеты  $2 \times 400$  м составили две команды. В первую взяли самого быстрого и самого медленного из этих четырех, во вторую — оставшихся двух школьников. Какая команда быстрее пробежит эстафету? (Каждый бегун бежит дистанцию с постоянной скоростью.)
- 8.3. Сумма двух дробей равна 1. Из числителей и знаменателей этих дробей вычли одно и то же число. Может ли сумма полученных дробей равняться  $\frac{1}{2016}$ ?
- 8.4. Пусть  $ABCD$  и  $DEFG$  — параллелограммы такие, что точка  $D$  лежит на отрезке  $AG$ , точка  $E$  — на отрезке  $DC$ , и при этом  $AB = DG = 2AD = 2DE$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $DG$ . Докажите, что  $CG$  — биссектриса угла  $MCF$ .
- 8.5. Имеется таблица  $100 \times 100$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть  $A$  — количество строк, в каждой из которых сумма чисел делится на 10 000, а  $B$  — количество столбцов, в каждом из которых сумма чисел делится на 10 000. Первый игрок выигрывает, если  $A > B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 8 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 8.1. Найдите какое-нибудь натуральное число  $N$  такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от  $N$ , то получится 2016.
- 8.2. Самый быстрый бегун в классе бежит на 0,1 м/с быстрее второго, на 0,2 м/с быстрее третьего и на 0,3 м/с быстрее четвертого. Для эстафеты  $2 \times 400$  м составили две команды. В первую взяли самого быстрого и самого медленного из этих четырех, во вторую — оставшихся двух школьников. Какая команда быстрее пробежит эстафету? (Каждый бегун бежит дистанцию с постоянной скоростью.)
- 8.3. Сумма двух дробей равна 1. Из числителей и знаменателей этих дробей вычли одно и то же число. Может ли сумма полученных дробей равняться  $\frac{1}{2016}$ ?
- 8.4. Пусть  $ABCD$  и  $DEFG$  — параллелограммы такие, что точка  $D$  лежит на отрезке  $AG$ , точка  $E$  — на отрезке  $DC$ , и при этом  $AB = DG = 2AD = 2DE$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $DG$ . Докажите, что  $CG$  — биссектриса угла  $MCF$ .
- 8.5. Имеется таблица  $100 \times 100$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть  $A$  — количество строк, в каждой из которых сумма чисел делится на 10 000, а  $B$  — количество столбцов, в каждом из которых сумма чисел делится на 10 000. Первый игрок выигрывает, если  $A > B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 9 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 9.1. Докажите, что при любых  $a$  и  $b$  хотя бы одно из уравнений  $x^2 - 2ax + ab = 0$  и  $x^2 - 2bx + ab = 0$  имеет решение.
- 9.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?
- 9.3. Четырех школьников, которые бегают с разной скоростью, разбили на две команды по два человека, и в первую включили самого быстрого из них. Вначале команды соревновались в том, бегуны какой команды раньше встретятся, если на дистанции в 400 м они побегут навстречу друг другу. Оказалось, что командам потребовалось одинаковое время. А какая команда быстрее пробежит эстафету  $2 \times 400$  м? (В эстафете каждый спортсмен пробегает 400 метров. Считается, что скорость бегунов во время забегов постоянна.)
- 9.4. В остром угле с вершиной  $S$  проведены трисектрисы: два луча, выходящих из точки  $S$  и делящих данный угол на три равные части. Из точки  $A$ , лежащей на одной стороне угла, опущены перпендикуляры  $AB$  и  $AC$  на эти трисектрисы. Докажите, что прямая  $BC$  перпендикулярна второй стороне угла.
- 9.5. Имеется таблица  $101 \times 101$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до  $101^2$ , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть  $A$  — количество строк, в которых сумма чисел делится на  $101^2$ , а  $B$  — количество столбцов, в которых сумма чисел делится на  $101^2$ . Первый игрок выигрывает, если  $A \geq B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 9 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 9.1. Докажите, что при любых  $a$  и  $b$  хотя бы одно из уравнений  $x^2 - 2ax + ab = 0$  и  $x^2 - 2bx + ab = 0$  имеет решение.
- 9.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?
- 9.3. Четырех школьников, которые бегают с разной скоростью, разбили на две команды по два человека, и в первую включили самого быстрого из них. Вначале команды соревновались в том, бегуны какой команды раньше встретятся, если на дистанции в 400 м они побегут навстречу друг другу. Оказалось, что командам потребовалось одинаковое время. А какая команда быстрее пробежит эстафету  $2 \times 400$  м? (В эстафете каждый спортсмен пробегает 400 метров. Считается, что скорость бегунов во время забегов постоянна.)
- 9.4. В остром угле с вершиной  $S$  проведены трисектрисы: два луча, выходящих из точки  $S$  и делящих данный угол на три равные части. Из точки  $A$ , лежащей на одной стороне угла, опущены перпендикуляры  $AB$  и  $AC$  на эти трисектрисы. Докажите, что прямая  $BC$  перпендикулярна второй стороне угла.
- 9.5. Имеется таблица  $101 \times 101$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до  $101^2$ , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть  $A$  — количество строк, в которых сумма чисел делится на  $101^2$ , а  $B$  — количество столбцов, в которых сумма чисел делится на  $101^2$ . Первый игрок выигрывает, если  $A \geq B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 10 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 10.1. Ненулевые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что числа  $a(b - c)$ ,  $b(c - a)$ ,  $c(a - b)$ , записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа  $a(b^3 - c^3)$ ,  $b(c^3 - a^3)$ ,  $c(a^3 - b^3)$  также образуют арифметическую прогрессию.
- 10.2. Вася задумал 4 различных натуральных числа. После этого он выписал на доску 6 чисел — все попарные суммы задуманных чисел. Какое наибольшее количество выписанных чисел могли оказаться простыми?
- 10.3. Рассматриваются прямоугольные треугольники, у которых вершина прямого угла находится в начале координат, а две другие вершины — на ветвях параболы  $y = x^2$ . Докажите, что для каждого такого треугольника произведение расстояний от вершин острых углов до оси  $Oy$  равно 1.
- 10.4. В треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$ . На стороне  $AB$  выбраны точки  $A_1$ ,  $C_2$  и  $B_3$ , на стороне  $BC$  — точки  $B_1$ ,  $A_2$  и  $C_3$ , на стороне  $CA$  — точки  $C_1$ ,  $B_2$  и  $A_3$  так, что отрезки  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  касаются окружности  $\omega$ , а четырехугольники  $AA_1A_2A_3$ ,  $BB_1B_2B_3$  и  $CC_1C_2C_3$  — параллелограммы. Докажите, что сумма площадей треугольников  $ABA_3$ ,  $BCB_3$  и  $CAC_3$  равна площади треугольника  $ABC$ .
- 10.5. Имеется таблица  $100 \times 100$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть  $A$  — наибольшая из сумм чисел в строках, а  $B$  — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если  $A > B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 10 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 10.1. Ненулевые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что числа  $a(b - c)$ ,  $b(c - a)$ ,  $c(a - b)$ , записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа  $a(b^3 - c^3)$ ,  $b(c^3 - a^3)$ ,  $c(a^3 - b^3)$  также образуют арифметическую прогрессию.
- 10.2. Вася задумал 4 различных натуральных числа. После этого он выписал на доску 6 чисел — все попарные суммы задуманных чисел. Какое наибольшее количество выписанных чисел могли оказаться простыми?
- 10.3. Рассматриваются прямоугольные треугольники, у которых вершина прямого угла находится в начале координат, а две другие вершины — на ветвях параболы  $y = x^2$ . Докажите, что для каждого такого треугольника произведение расстояний от вершин острых углов до оси  $Oy$  равно 1.
- 10.4. В треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$ . На стороне  $AB$  выбраны точки  $A_1$ ,  $C_2$  и  $B_3$ , на стороне  $BC$  — точки  $B_1$ ,  $A_2$  и  $C_3$ , на стороне  $CA$  — точки  $C_1$ ,  $B_2$  и  $A_3$  так, что отрезки  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  касаются окружности  $\omega$ , а четырехугольники  $AA_1A_2A_3$ ,  $BB_1B_2B_3$  и  $CC_1C_2C_3$  — параллелограммы. Докажите, что сумма площадей треугольников  $ABA_3$ ,  $BCB_3$  и  $CAC_3$  равна площади треугольника  $ABC$ .
- 10.5. Имеется таблица  $100 \times 100$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть  $A$  — наибольшая из сумм чисел в строках, а  $B$  — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если  $A > B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 11 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 11.1. Докажите, что при любых  $\alpha$  и  $\beta$  хотя бы одно из уравнений  $x^2 - 2x \sin \alpha + \sin^2 \beta = 0$  и  $x^2 - 2x \cos \alpha + \cos^2 \beta = 0$  имеет решение.
- 11.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих чисел была простым числом?
- 11.3. Обозначим через  $O$  вершину параболы  $y = ax^2$ . Назовем прямую, пересекающую параболу в двух точках  $A$  и  $B$ , *особой*, если угол  $AOB$  — прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.
- 11.4. Дана треугольная пирамида  $SABC$ . На ребрах  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  выбраны точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно так, что отрезки  $BA_1$  и  $CA_1$  — биссектрисы треугольников  $BSA$  и  $CSA$  соответственно; отрезки  $AB_1$  и  $CB_1$  — биссектрисы треугольников  $ASB$  и  $CSB$  соответственно; а отрезки  $AC_1$  и  $BC_1$  — биссектрисы треугольников  $ASC$  и  $BSC$  соответственно. Пусть  $SH$  — высота пирамиды. Докажите, что если  $BC > CA > AB$ , то  $BC \cdot HA < CA \cdot HB < AB \cdot HC$ .
- 11.5. Имеется таблица  $111 \times 111$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до  $111^2$ , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть  $A$  — наибольшая из сумм чисел в строках, а  $B$  — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если  $A \geq B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

## 11 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 11.1. Докажите, что при любых  $\alpha$  и  $\beta$  хотя бы одно из уравнений  $x^2 - 2x \sin \alpha + \sin^2 \beta = 0$  и  $x^2 - 2x \cos \alpha + \cos^2 \beta = 0$  имеет решение.
- 11.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих чисел была простым числом?
- 11.3. Обозначим через  $O$  вершину параболы  $y = ax^2$ . Назовем прямую, пересекающую параболу в двух точках  $A$  и  $B$ , *особой*, если угол  $AOB$  — прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.
- 11.4. Дана треугольная пирамида  $SABC$ . На ребрах  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  выбраны точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно так, что отрезки  $BA_1$  и  $CA_1$  — биссектрисы треугольников  $BSA$  и  $CSA$  соответственно; отрезки  $AB_1$  и  $CB_1$  — биссектрисы треугольников  $ASB$  и  $CSB$  соответственно; а отрезки  $AC_1$  и  $BC_1$  — биссектрисы треугольников  $ASC$  и  $BSC$  соответственно. Пусть  $SH$  — высота пирамиды. Докажите, что если  $BC > CA > AB$ , то  $BC \cdot HA < CA \cdot HB < AB \cdot HC$ .
- 11.5. Имеется таблица  $111 \times 111$ , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до  $111^2$ , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть  $A$  — наибольшая из сумм чисел в строках, а  $B$  — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если  $A \geq B$ , иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?