6 класс

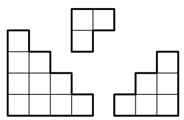
6.1. У Коли было два деревянных кубика. На первом кубике на одной грани он написал букву А, на другом на трёх гранях он написал буквы Э, Ю, Я. Покажите, как ему дописать на грани кубиков буквы (по одной букве на грань) так, чтобы из этих кубиков можно было составить двухбуквенные сокращения всех дней недели: ПН, ВТ, СР, ЧТ, ПТ, СБ и ВС.

6.2. Запишите число 2009 при помощи нескольких одинаковых цифр, скобок и знаков арифметических операций. При этом разрешается использовать не более 12 цифр. Из цифр можно составлять числа.

6.3. Для празднования дня рождения Петя покупал пирожные разных сортов. Если пирожное стоило N рублей, то Петя покупал такое количество этих пирожных, которое отличается от N не более, чем на 1. За все пирожные Петя заплатил 2009 рублей. Докажите, что среди купленных Петей пирожных есть такие, что они стоят M рублей, и Петя купил их ровно M штук. (Каждое пирожное стоит целое число рублей.)

6.4. У продавца есть чашечные весы. Помогите продавцу придумать набор из 4 гирь, с помощью которых он сможет взвешивать на этих весах любое целое число килограммов от 1 до 12. При каждом взвешивании можно использовать не более двух гирь; гири можно ставить на разные чашки весов.

6.5. Из квадрата 7×7 вырезали одну клетку, а оставшуюся часть разрезали на одинаковые лесенки. Как это сделать, получив наименьшее количество лесенок? Объясните, почему нельзя обойтись меньшим числом лесенок. (Лесенкой называется фигура из всех клеток некоторого квадрата, лежащих по одну сторону от его диагонали; на рисунке показаны примеры нескольких различных лесенок.)



XXXVI Московская областная математическая олимпиада

6 класс

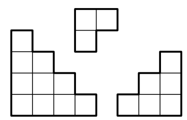
6.1. У Коли было два деревянных кубика. На первом кубике на одной грани он написал букву А, на другом на трёх гранях он написал буквы Э, Ю, Я. Покажите, как ему дописать на грани кубиков буквы (по одной букве на грань) так, чтобы из этих кубиков можно было составить двухбуквенные сокращения всех дней недели: ПН, ВТ, СР, ЧТ, ПТ, СБ и ВС.

6.2. Запишите число 2009 при помощи нескольких одинаковых цифр, скобок и знаков арифметических операций. При этом разрешается использовать не более 12 цифр. Из цифр можно составлять числа.

6.3. Для празднования дня рождения Петя покупал пирожные разных сортов. Если пирожное стоило N рублей, то Петя покупал такое количество этих пирожных, которое отличается от N не более, чем на 1. За все пирожные Петя заплатил 2009 рублей. Докажите, что среди купленных Петей пирожных есть такие, что они стоят M рублей, и Петя купил их ровно M штук. (Каждое пирожное стоит целое число рублей.)

6.4. У продавца есть чашечные весы. Помогите продавцу придумать набор из 4 гирь, с помощью которых он сможет взвешивать на этих весах любое целое число килограммов от 1 до 12. При каждом взвешивании можно использовать не более двух гирь; гири можно ставить на разные чашки весов.

6.5. Из квадрата 7×7 вырезали одну клетку, а оставшуюся часть разрезали на одинаковые лесенки. Как это сделать, получив наименьшее количество лесенок? Объясните, почему нельзя обойтись меньшим числом лесенок. (Лесенкой называется фигура из всех клеток некоторого квадрата, лежащих по одну сторону от его диагонали; на рисунке показаны примеры нескольких различных лесенок.)



7 класс

7.1. Два натуральных числа в сумме дают 2009. Вася увеличил каждое из них на 50 и перемножил полученные числа. У Васи получилось число, оканчивающееся на 2009. Докажите, что Вася ошибся.

7.2. Запишите число 2009 при помощи трёх цифр, каждую из которых нужно использовать ровно два раза, скобок и знаков арифметических операций. Из цифр можно составлять числа.

7.3. Мама испекла пирог и разрезала его на куски, которые они с мужем полностью разделили между собой. Потом они позвали сына и дочь и вместе с ними съели пирог. При этом оказалось, что мама треть каждого своего куска отдала детям, причем дочери — втрое больше, чем сыну; папа же восьмую часть каждого своего куска отдал детям, причем дочери — вдвое меньше, чем сыну. Какая часть пирога в итоге могла достаться сыну?

7.4. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 на различные клетчатые фигурки, каждая из которых состоит не более чем из 5 клеток и не является прямоугольником (или квадратом).

7.5. В каждый день ноября Винни-Пух ходил в гости либо к Пятачку, либо к Кролику, либо к Иа-Иа. При этом за любые два последовательных дня он хотя бы раз ходил к Пятачку, а за любые три последовательных дня — хотя бы раз к Кролику. Сколько раз мог он за это время сходить к Иа-Иа? (В ноябре 30 дней. Винни-Пух был в гостях у Иа-Иа хотя бы один раз.)

XXXVI Московская областная математическая олимпиада

7 класс

7.1. Два натуральных числа в сумме дают 2009. Вася увеличил каждое из них на 50 и перемножил полученные числа. У Васи получилось число, оканчивающееся на 2009. Докажите, что Вася ошибся.

7.2. Запишите число 2009 при помощи трёх цифр, каждую из которых нужно использовать ровно два раза, скобок и знаков арифметических операций. Из цифр можно составлять числа.

7.3. Мама испекла пирог и разрезала его на куски, которые они с мужем полностью разделили между собой. Потом они позвали сына и дочь и вместе с ними съели пирог. При этом оказалось, что мама треть каждого своего куска отдала детям, причем дочери — втрое больше, чем сыну; папа же восьмую часть каждого своего куска отдал детям, причем дочери — вдвое меньше, чем сыну. Какая часть пирога в итоге могла достаться сыну?

7.4. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 на различные клетчатые фигурки, каждая из которых состоит не более чем из 5 клеток и не является прямоугольником (или квадратом).

7.5. В каждый день ноября Винни-Пух ходил в гости либо к Пятачку, либо к Кролику, либо к Иа-Иа. При этом за любые два последовательных дня он хотя бы раз ходил к Пятачку, а за любые три последовательных дня — хотя бы раз к Кролику. Сколько раз мог он за это время сходить к Иа-Иа? (В ноябре 30 дней. Винни-Пух был в гостях у Иа-Иа хотя бы один раз.)

8 класс

8.1. Запишите число 2009 при помощи двух различных цифр, скобок и знаков арифметических операций так, чтобы общее количество использованных цифр равнялось 8. Из цифр можно составлять числа.

8.2. Расставьте в клетках таблицы 8×8 числа 1, 2, 3, 4 (каждое — по 16 раз) так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних клетках (имеющих общую сторону) являлась простым числом.

8.3. В Королевстве живут лжецы (они всегда лгут) и рыцари (они всегда говорят правду). Однажды в зале собрались советники короля. Один из советников сказал: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 1». Двое советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 2». Трое советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 3». Четверо советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 4». Оставшиеся пять советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 5».

Сколько лжецов могло быть среди собравшихся в зале?

8.4. Точки D и E — середины сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC, а BH — его высота. Известно, что треугольник DEH — равносторонний. Докажите, что треугольник ABC также равносторонний.

8.5. В четырёх ячейках памяти игрального автомата записаны числа a, b, c, d. Автомат может сложить или вычесть два числа (бесплатно) или перемножить их (за 1 рубль); результат он записывает в новую ячейку. Может ли игрок, потратив всего три рубля, добиться того, что в каких-то трёх ячейках будут записаны числа $2(ab+cd)$, $2(ac+bd)$ и $2(ad+bc)$? (Исходные числа игроку неизвестны.)

XXXVI Московская областная математическая олимпиада

8 класс

8.1. Запишите число 2009 при помощи двух различных цифр, скобок и знаков арифметических операций так, чтобы общее количество использованных цифр равнялось 8. Из цифр можно составлять числа.

8.2. Расставьте в клетках таблицы 8×8 числа 1, 2, 3, 4 (каждое — по 16 раз) так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних клетках (имеющих общую сторону) являлась простым числом.

8.3. В Королевстве живут лжецы (они всегда лгут) и рыцари (они всегда говорят правду). Однажды в зале собрались советники короля. Один из советников сказал: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 1». Двое советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 2». Трое советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 3». Четверо советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 4». Оставшиеся пять советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 5».

Сколько лжецов могло быть среди собравшихся в зале?

8.4. Точки D и E — середины сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC, а BH — его высота. Известно, что треугольник DEH — равносторонний. Докажите, что треугольник ABC также равносторонний.

8.5. В четырёх ячейках памяти игрального автомата записаны числа a, b, c, d. Автомат может сложить или вычесть два числа (бесплатно) или перемножить их (за 1 рубль); результат он записывает в новую ячейку. Может ли игрок, потратив всего три рубля, добиться того, что в каких-то трёх ячейках будут записаны числа $2(ab+cd)$, $2(ac+bd)$ и $2(ad+bc)$? (Исходные числа игроку неизвестны.)

9 класс

9.1. Найдите хотя бы одно натуральное число такое, что вычеркивание любой одной его цифры дает натуральное число, делящееся на все числа 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9. Объясните, почему найденное число подходит.

9.2. Известно, что среди чисел $x + y$, $x - y$, $x^2 - y^2$ и $x^2 + y^3$ ровно одно отрицательное, а остальные положительны. Какие знаки могут иметь числа x и y?

9.3. На доске написаны 2009 нечётных чисел. Разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них числа $x + y$ и xy. Можно ли добиться того, чтобы на доске осталось 2009 чётных чисел?

9.4. Существует ли треугольник, в котором каждая из двух медиан по крайней мере в полтора раза длиннее стороны, к которой она проведена?

9.5. Прыгающая ладья умеет бить по вертикали и горизонтали на чётное число клеток. Какое наибольшее число не бьющих друг друга прыгающих ладей можно расставить на доске 7×7?

XXXVI Московская областная математическая олимпиада

9 класс

9.1. Найдите хотя бы одно натуральное число такое, что вычеркивание любой одной его цифры дает натуральное число, делящееся на все числа 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9. Объясните, почему найденное число подходит.

9.2. Известно, что среди чисел $x + y$, $x - y$, $x^2 - y^2$ и $x^2 + y^3$ ровно одно отрицательное, а остальные положительны. Какие знаки могут иметь числа x и y?

9.3. На доске написаны 2009 нечётных чисел. Разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них числа $x + y$ и xy. Можно ли добиться того, чтобы на доске осталось 2009 чётных чисел?

9.4. Существует ли треугольник, в котором каждая из двух медиан по крайней мере в полтора раза длиннее стороны, к которой она проведена?

9.5. Прыгающая ладья умеет бить по вертикали и горизонтали на чётное число клеток. Какое наибольшее число не бьющих друг друга прыгающих ладей можно расставить на доске 7×7?

10 класс

10.1. Графики функций $y = ax^2$, $y = bx$ и $y = c$ пересекаются в одной точке с положительной ординатой. Докажите, что трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней.

10.2. На урок рисования пришли 25 детей и принесли с собой 39 карандашей 10 различных цветов. Каждый принес хотя бы один карандаш. Докажите, что у двоих детей наборы цветов карандашей совпадают.

10.3. Простые числа a и b отличаются на 2. Может ли оказаться, что числа $a + 200$ и $b + 200$ — тоже простые?

10.4. Пусть α, β — острые углы такие, что $\sin\alpha > \operatorname{tg}\beta$. Докажите, что $\sin(\alpha/2) > \operatorname{tg}(\beta/2)$.

10.5. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O. Пусть P — точка пересечения прямой, проходящей через точку C параллельно BO, и прямой, проходящей через точку D параллельно AO (точки P и O лежат по разные стороны от CD). Докажите, что $\angle DPO = \frac{1}{2}\angle BCD$.

XXXVI Московская областная математическая олимпиада

10 класс

10.1. Графики функций $y = ax^2$, $y = bx$ и $y = c$ пересекаются в одной точке с положительной ординатой. Докажите, что трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней.

10.2. На урок рисования пришли 25 детей и принесли с собой 39 карандашей 10 различных цветов. Каждый принес хотя бы один карандаш. Докажите, что у двоих детей наборы цветов карандашей совпадают.

10.3. Простые числа a и b отличаются на 2. Может ли оказаться, что числа $a + 200$ и $b + 200$ — тоже простые?

10.4. Пусть α, β — острые углы такие, что $\sin\alpha > \operatorname{tg}\beta$. Докажите, что $\sin(\alpha/2) > \operatorname{tg}(\beta/2)$.

10.5. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O. Пусть P — точка пересечения прямой, проходящей через точку C параллельно BO, и прямой, проходящей через точку D параллельно AO (точки P и O лежат по разные стороны от CD). Докажите, что $\angle DPO = \frac{1}{2}\angle BCD$.

11 класс

11.1. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ (a, b, c — натуральные числа) имеет два различных целых корня. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди его коэффициентов a, b, c?

11.2. Для некоторых положительных чисел a, b оказалось, что три числа a^2, b^2, $a + b$ — рациональные. Докажите, что числа a и b также рациональные.

11.3. У театральных касс собралось 17 человек. Могло ли так оказаться, что у каждого человека количество друзей среди собравшихся отличалось от количества врагов среди собравшихся ровно на 3? (Если A дружит (враждует) с B, то и B дружит (враждует) с A; некоторые люди могут быть незнакомы друг с другом.)

11.4. В основание четырёхугольной пирамиды можно вписать окружность. Известно, что биссектрисы трёх плоских углов при вершине пирамиды попадают в точки касания этой окружности со сторонами основания. Докажите, что и биссектриса четвёртого плоского угла также попадает в точку касания окружности со стороной основания.

11.5. Произведение действительных чисел x и y больше 4. Могут ли одновременно выполняться неравенства $x + y^2 < 2$ и $y + x^2 < 2$?

XXXVI Московская областная математическая олимпиада

11 класс

11.1. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ (a, b, c — натуральные числа) имеет два различных целых корня. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди его коэффициентов a, b, c?

11.2. Для некоторых положительных чисел a, b оказалось, что три числа a^2, b^2, $a + b$ — рациональные. Докажите, что числа a и b также рациональные.

11.3. У театральных касс собралось 17 человек. Могло ли так оказаться, что у каждого человека количество друзей среди собравшихся отличалось от количества врагов среди собравшихся ровно на 3? (Если A дружит (враждует) с B, то и B дружит (враждует) с A; некоторые люди могут быть незнакомы друг с другом.)

11.4. В основание четырёхугольной пирамиды можно вписать окружность. Известно, что биссектрисы трёх плоских углов при вершине пирамиды попадают в точки касания этой окружности со сторонами основания. Докажите, что и биссектриса четвёртого плоского угла также попадает в точку касания окружности со стороной основания.

11.5. Произведение действительных чисел x и y больше 4. Могут ли одновременно выполняться неравенства $x + y^2 < 2$ и $y + x^2 < 2$?