Сборник содержит материалы для проведения II-го (муниципального) этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задания подготовили члены жюри Московской областной олимпиады школьников по математике Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт (государственный университет)).

Задачи 10.1 и 10.4 предложены М.В. Мурашкиным.

Рецензент: Б.В. Трушин.

Компьютерный макет подготовили К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, рекомендуем при проверке работ оценивать:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, её содержанию и оценке работ участников можно задать 6 декабря 2009 г. с 9.30 до 17.00 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможного количества баллов, то есть не менее 18 баллов. Важно отметить, что как победителями, так и призёрами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов, поскольку расхождение результатов двух школьников в несколько баллов может отражать только умение одного из них более четко записывать решения задач. Однако, количество победителей и призёров не должно превышать 25 % от общего числа участников олимпиады.

Поэтому *рекомендуемая* схема определения победителей и призёров такова: победителями олимпиады становятся лучший школьник в параллели, а также участники, отставшие от него на 1–3 балла, при условии, что они набрали не менее 18 баллов. Участники, у которых сумма набранных баллов составляет 60 %–90 % от лучшего результата, становятся призёрами олимпиады.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний...»). Существует ряд задач, в которых ответ выбирается из двух вариантов (например, в задачах с вопросом «Верно ли...», «Может ли...» или «Существует ли...»). В таких задачах только угаданный правильный ответ без объяснений, как правило, оценивается в 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 класса, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Желаем успешной работы!

В 2009–2010 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 19 января (1 тур) и 20 января (2 тур) 2010 г. для учащихся 8–11 классов. Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, участниками регионального этапа являются:

– школьники, являющиеся победителями и призёрами регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– победители и призёры муниципального этапа олимпиады текущего года.

К участию в Московской областной математической олимпиаде допускаются только учащиеся образовательных учреждений Московской области.

Для организации областной олимпиады оргкомитеты муниципального этапа олимпиады обязаны предоставить протоколы муниципального этапа олимпиады и отправить заявку на участие в Министерство образования Московской области по электронному адресу `obsh_obraz@mail.ru` (Варлахова Лариса Михайловна).

6 класс

6.1. Заметим, что в двухбуквенных сокращениях дней недели встречается восемь букв: П, Н, В, Т, С, Р, Ч, Б. Нам нужно написать пять из них на одном кубике, а оставшиеся три — на другом. Это можно сделать так, как показано на рис. 1.

День недели	1 кубик: БВПРЧ	2 кубик: НСТ
ПН	П	Н
ВТ	В	Т
СР	Р	С
ЧТ	Ч	Т
ПТ	П	Т
СБ	Б	С
ВС	В	С

Рис. 1

Замечание. Предъявленный пример единственен. Действительно, нужно написать 8 букв на 8 гранях, поэтому каждую букву придется написать только один раз. Далее, если на кубике x написана буква Т, то на другом (y) обязаны быть буквы В, Ч и П, тогда на x придется написать С и Н, а тогда на y должны быть еще Р и Б. Значит, пять букв Б, В, П, Р, Ч должны быть на одном кубике (очевидно, на первом), а буквы Н, С и Т — на втором.

Комментарий. Правильный пример — 7 баллов.

6.2. **Ответ.** Например, $333\cdot(3+3)+33:3=2009$, $2222-222+2\cdot2\cdot2+ +2:2=2009$ или $5\cdot5\cdot5\cdot(5+5+5+5:5)+5+5-5:5=2009$.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов. Любой пример более, чем с 12 цифрами — 0 баллов.

6.3. Предположим, что таких пирожных не нашлось. То есть, если пирожное стоило N рублей, то Петя покупал либо $N-1$, либо $N+1$ такое пирожное. Тогда за пирожные такого сорта Петя платил либо $N(N-1)$ рублей, либо $N(N+1)$ рублей. Но каждое из таких чисел является чётным (как произведение двух последовательных натуральных чисел). Значит, за пирожные каждого сорта Петя платил чётное число рублей. Но тогда и за все пирожные он заплатил бы чётное число рублей, а число 2009 нечётно. Противоречие.

6.4. Подойдет, например, такой набор гирь: 1 кг, 2 кг, 5 кг и 10 кг. В таблице на рис. 2 показано, как ставить гири на чашки весов.

(Предполагается, что взвешиваемый товар находится на левой чашке весов.)

Масса товара	Левая чашка	Правая чашка
1		1
2		2
3		$1+2$
4	1	5
5		5
6		$5+1$
7		$5+2$
8	2	10
9	1	10
10		10
11		$10+1$
12		$10+2$

Рис. 2

Замечание. Предъявленный пример не единственен.

Комментарий. Правильный пример без обоснования — 5 баллов.

6.5. Докажем вначале, что нельзя обойтись меньше, чем 8 лесенками. Действительно, после вырезания одной клетки в квадрате останется 48 клеток. Легко проверить, что лесенки могут состоять из 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 и т. д. клеток; при этом число 48 должно делиться на количество клеток в лесенке. Значит, наши одинаковые лесенки, на которые разрезается фигура, могут состоять максимум из 6 клеток. На рис. 3 показано, как разрезать фигуру, получаемую удалением из квадрата 7×7 центральной клетки, на 8 лесенок, состоящих из 6 клеток.

Комментарий. Правильный ответ и пример без доказательства минимальности — 3 балла.

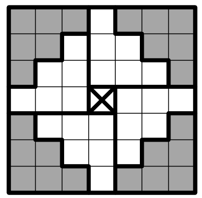

Рис. 3

7 класс

7.1. Если сумма двух натуральных числе равна 2009, то одно из них чётное, а другое нечётное. Если к чётному числу прибавить 50, получится чётное число, а если к нечётному числу прибавить 50, получится нечётное число. А произведение чётного и нечётного чисел должно быть числом чётным и поэтому не может оканчиваться на 2009.

7.2. **Ответ.** Например, $2020 - 11 = 2009$ или $2003 + 3 \cdot 2 = 2009$.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

7.3. **Ответ.** 1/12.

От мамы сыну досталась четверть от трети ее пирога, значит, 1/12 часть её пирога. От папы сыну достались две трети от восьмой части его пирога, т. е. также 1/12 часть его пирога. Значит, независимо от того, как вначале родители поделили пирог, сыну достанется 1/12 от всего пирога.

Комментарий. Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 2 балла.

7.4. Один из возможных примеров показан на рис. 4.

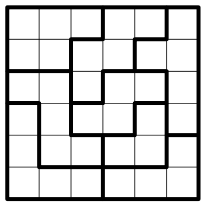

Рис. 4

Замечание. Существуют и другие примеры разрезания.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов. Если в разрезании есть одинаковые фигурки, прямоугольник (квадрат) или фигурки, состоящие более, чем из 5 клеток — 0 баллов.

7.5. **Ответ.** 1 или 2 раза.

Предположим, что Винни-Пух был в гостях у Иа-Иа в какой-то день ноября, но не 1 и не 30 числа. Так как за два последовательных дня он хотя бы раз ходил к Пятачку, то в предыдущий день он был обязан побывать у Пятачка, и в следующий день после посещения Иа-Иа он также должен был побывать у Пятачка. Но тогда в эти три последовательных дня он ни разу не был в гостях у Кролика, что противоречит условию. Значит, Винни-Пух мог быть в гостях у Иа-Иа не больше двух раз (только 1 и 30 ноября).

Покажем, что он мог быть в гостях как один, так и два раза. Обозначим приходы в гости к Кролику — К, к Пятачку — П, к Иа-Иа — И.

Один раз он мог побывать в гостях у Иа-Иа следующим образом: ИПКПК… ПКП. Два раза он мог побывать в гостях у Иа-Иа следующим образом: ИПКППКПКП… ПКПИ.

Комментарий. Доказано, что Винни-Пух был у Иа-Иа не более двух раз — 4 балла. При отсутствии этой оценки за каждый из примеров (на 1 или 2 раза) — по 1 баллу. Правильная оценка с одним из примеров — 5 баллов.

8 класс

8.1. **Ответ.** Например, $999 + 999 + 9 + 2 = 2009$, $2222 - 222 + 9 = 2009$, $111 \cdot 18 + 11 \cdot 1 = 2009$, $999 \cdot 2 + 2 + 9 + 2 - 2 = 2009$ или $2122 - 111 - 2 = 2009$.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

8.2. Заметим, например, что все суммы $1 + 2$, $2 + 3$, $3 + 4$, $4 + 1$ — простые числа. Значит, подойдет, например, расстановка на рис. 5.

1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3

Рис. 5

Замечание. Существуют и другие примеры. Однако в любом правильном примере четные цифры не должны стоять рядом; значит, если доску раскрасить в шахматном порядке, то все четные цифры должны стоять в клетках одного цвета.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов. Любой неправильный пример — 0 баллов.

8.3. **Ответ.** 10 или 15 лжецов.

Заметим, что всего в зале собралось 15 человек. Если среди них не было ни одного рыцаря, то количество лжецов отличается от количества рыцарей на 15, и все присутствовавшие солгали. То есть случай, когда все в зале лжецы — возможен.

Пусть в зале был хотя бы один рыцарь. Тогда все рыцари должны были сказать одинаковую фразу, а остальные фразы говорят лжецы. Значит, в зале могло быть 1, 2, 3, 4 или 5 рыцарей. Если в зале соответственно 1, 2, 3 или 4 рыцаря, то количество лжецов отличается от количества рыцарей на 13, 11, 9 или 7, и такая ситуация невозможна. Если же в зале 5 рыцарей, то количество лжецов отличается от количества рыцарей на 5, и такая ситуация возможна.

Комментарий. Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 2 балла. Только один из ответов без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов. Решение в целом верно, однако упущен случай 15 лжецов — 5 баллов.

8.4. По свойству средней линии треугольника $DE \parallel AC$, поэтому, ес-

ли BH пересекает DE в точке M, то HM — высота в равностороннем треугольнике DEH. Тогда она является медианой, т. е. BM — высота и медиана треугольника DBE, откуда $DB = BE$. Значит, равны и вдвое бо́льшие стороны AB и CB. Тогда BH — высота и медиана равнобедренного треугольника ABC, и отрезки DH, EH являются средними линиями в $\triangle ABC$. Наконец, поскольку средние линии этого треугольника равны, то равны и его стороны, что и требовалось доказать.

8.5. **Ответ.** Может.

Сначала получим все попарные суммы наших чисел. Затем за три рубля получим числа $(a+b)(c+d)$, $(a+c)(b+d)$, $(a+d)(b+c)$. Теперь можно получить и требуемые числа: $2(ab+cd) = (a+c)(b+d)+(a+d)(b+c)-(a+b)(c+d)$, остальные получаются аналогично.

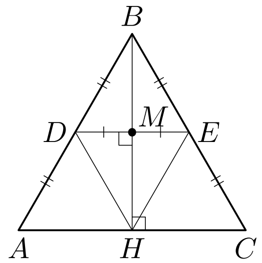

Рис. 6

Комментарий. Правильный ответ без обоснования — 0 баллов. Приведен алгоритм, использующий более трех умножений или зависящий от исходных чисел — 0 баллов.

9 класс

9.1. **Ответ.** Например, подходит число 990000.

Замечание. Покажем (в задаче это не требуется!), что число 990000 — минимальное с таким свойством.

Во-первых, в силу признака делимости на 9, все цифры данного числа N могут различаться только на число, делящееся на 9 (если две соседние цифры a и b дают разные остатки при делении на 9, то и числа A и B, полученные из N соответственно вычеркиванием цифр a и b, будут давать разные остатки при делении на 9, т. е. одно из них не будет делиться на 9). Кроме того, число, полученное из N вычеркиванием любой цифры, должно оканчиваться на 0 в силу его делимости на 5 и на 2. Значит, N состоит из девяток и нулей. Количество нулей, стоящих в конце числа N, должно быть, в силу признака делимости на 8, не меньше четырёх (один из нулей может быть вычеркнут). Количество девяток должно быть не менее двух (чтобы после вычеркивания одной из них оставалось натуральное число). Значит, наименьшим подходящим может быть число 990000.

Комментарий. Любой правильный пример без обоснования — 5 баллов.

9.2. **Ответ.** $x > 0$, $y < 0$.

Среди чисел $x - y$, $x + y$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ не может быть ровно одного отрицательного, так как и произведение, и частное двух положительных чисел положительны. Тогда они все положительны и поэтому $x^2 + y^3 < 0$, и, поскольку $x^2 \geqslant 0$, то $y^3 < 0$ и $y < 0$. Наконец, $x = (x + y) - y > 0$.

Комментарий. Только ответ (или ответ с примером чисел x и y, удовлетворяющих условию задачи) — 1 балл.

9.3. **Ответ.** Нельзя.

Докажем, что если стираются два числа, среди которых есть нечётное, то среди вновь записанных также будет нечётное число. Действительно, если были стерты два нечётных числа, то их произведение будет нечётно. Если же стираются чётное и нечётное число, то их сумма будет нечётна.

Итак, поскольку изначально на доске были нечётные числа, то и после любого количества операций стирания и записи на доске будет оставаться хотя бы одно нечётное число. Поэтому добиться того, чтобы на доске осталось 2009 чётных чисел невозможно.

Комментарий. Ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов.

9.4. **Ответ.** Не существует.

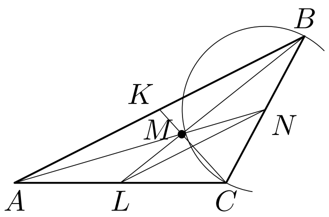

Рис. 7

Первое решение. Пусть в некотором треугольнике ABC выполняются неравенства $AN \geqslant \frac{3}{2}BC$ и $CK \geqslant \frac{3}{2}AB$, где AN и CK — медианы. Заметим, что $AN < \frac{1}{2}(AB + AC)$, так как $AN < AL + LN$ и $LN = \frac{1}{2}AB$, если L — середина стороны AC. Значит, $\frac{1}{2}(AB + AC) > \frac{3}{2}BC$. Аналогично $\frac{1}{2}(CA + CB) > \frac{3}{2}AB$. Сложив эти два неравенства, получаем $\frac{1}{2}(AB + BC) + AC > \frac{3}{2}(AB + BC)$, или $AC > AB + BC$. Это невозможно по неравенству треугольника. Противоречие.

Второе решение. Опять предположим, что в треугольнике ABC выполняются неравенства $AN \geqslant \frac{3}{2}BC$ и $CK \geqslant \frac{3}{2}AB$. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $MN = \frac{1}{3}AN$, поэтому $MN \geqslant \frac{1}{2}BC$. Это значит, что точка M лежит вне окружности с центром N и радиусом $\frac{1}{2}BC$ (иначе говоря, окружности с диаметром BC) или на ней, поэтому $\angle BMC \leqslant 90°$. Аналогично $\angle BMA \leqslant 90°$. Но тогда $\angle AMC \geqslant 180°$. Противоречие.

Комментарий. Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов.

9.5. **Ответ.** 13.

Пример для 13 ладей показан на рис. 8. Приведем два доказательства того, что 14 ладей расставить нельзя.

Способ 1. Пронумеруем столбцы числами от 1 до 7. Ясно, что в каждом столбце может стоять не более двух ладей:

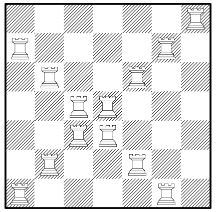

Рис. 8

1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1

Рис. 9

максимум одна на черных клетках, и максимум одна на белых. Значит, в столбцах с чётными номерами стоит не более 6 ладей. Рассмотрим теперь столбцы с нечётными номерами. Если в них стоят хотя бы 8 ладей, то две из них находятся в одной строке и, следовательно, бьют друг друга. Это невозможно, поэтому в столбцах с нечетными номерами не более 7 ладей, и общее число ладей не больше $6 + 7 = 13$.

Способ 2. Расставим числа, как показано на рис. 9. Тогда на клетках с числами 1 может стоять не более 4 ладей (максимум по одной в строке), на клетках с числами 2 — не более 3 ладей (максимум по одной в строке), а на клетках с числами 3 (и аналогично, с числами 4) — также не более 3 ладей (максимум по одной в столбце). Итого не более $4 + 3 + 3 + 3 = 13$ ладей.

Замечание. Существуют и другие расстановки 13 ладей. Однако в любом правильном примере количества ладей на клетках с числами 1, 2, 3, 4 на рис. 9 должны быть соответственно равны 4, 3, 3, 3.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов. Ответ с правильным примером расположения 13 ладей, но без обоснования или с неверным обоснованием максимальности — 2 балла. Доказано, что ладей не больше 14 — 1 балл.

10 класс

10.1. Пусть t — абсцисса точки пересечения, тогда $at^2 = bt = c > 0$, откуда $b = at$, $c = at^2$, и числа a и t ненулевые. Тогда наш трёхчлен имеет вид $a(x^2 + xt + t^2)$, а его дискриминант равен $a^2(t^2 - 4t^2) = -3a^2t^2 < 0$, что и означает, что он не имеет корней.

10.2. Пусть x детей принесли по одному карандашу; тогда $25 - x$ детей принесли хотя бы по два. Тогда общее число принесенных карандашей не меньше $x + 2(25 - x) = 50 - x$; значит, $39 \geqslant 50 - x$, или $x \geqslant 11$. Итак, хотя бы 11 детей принесли ровно по одному карандашу, а тогда два из этих карандашей будут одинакового цвета, и два ребенка с одинаковыми наборами найдены.

Комментарий. Сформулировано, но не доказано, что хотя бы у 11 детей ровно по одному карандашу — 2 балла.

10.3. **Ответ.** Не может.

Предположим, что описанная в условии ситуация возможна. Пусть $b = a + 2$, тогда числа a, $a + 2$, $a + 200$ и $a + 202$ — простые. Заметим, что тогда число a нечётно, то есть $a \geqslant 3$. Рассмотрим числа a, $a + 1$, $a + 2$; одно из них делится на 3. Если a делится на 3, то $a = 3$ и $a + 202 = 205$ — составное. Если $a + 1$ делится на 3, то число $a + 202 = (a + 1) + 201 = (a + 1) + 3 \cdot 67$ делится на 3 и больше 3, т. е. составное. Если же $a + 2$ делится на 3, то оно составное, так как $a + 2 > 3$. Во всех возможных случаях мы пришли к противоречию.

Комментарий. Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов. Если пропущен случай $a = 3$ — ставить не более 4 баллов.

10.4. Заметим, что $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2) \cdot \cos(\alpha/2) < 2\sin(\alpha/2)$, а $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}(\beta/2) \cdot \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(\beta/2)} > 2\operatorname{tg}(\beta/2)$. Таким образом, $2\sin(\alpha/2) > \sin\alpha > \operatorname{tg}\beta > 2\operatorname{tg}(\beta/2)$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Рассуждения со ссылкой на графики без обоснования поведения функций — 0 баллов.

10.5. Центр вписанной окружности лежит на биссектрисах углов четырёхугольника. Кроме того, углы с соответственно параллельными сторонами равны, поэтому $\angle CPD = \angle BOA$ (см. рис. 10). Но $\angle BOA = 180° - \angle OBA - \angle OAB = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD)$. Аналогично, $\angle COD = 180° - \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle CDA)$. Значит, $\angle BOA + \angle COD = 360° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD + \angle BCD + \angle CDA) = 180°$, поэтому и $\angle CPD + \angle COD = 180°$. Это означает, что четырёхугольник $OCPD$ можно вписать в окружность. Но тогда $\angle DPO = \angle DCO = \frac{1}{2}\angle BCD$.

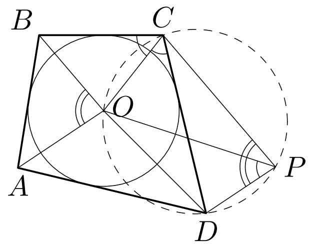

Рис. 10

11 класс

11.1. **Ответ.** Два.

Предположим, что все три числа a, b, c — простые. Пусть x_1, x_2 — корни трёхчлена. Тогда по теореме Виета $ax_1x_2 = c$. Значит, $x_1x_2 = 1$, поскольку числа a и c простые. Тогда $x_1 = x_2 = \pm 1$, что невозможно, так как корни должны быть различными.

Таким образом, среди коэффициентов не более двух простых чисел. Осталось заметить, что, например, у трёхчлена $x^2 + 3x + 2$ два простых коэффициента, и оба корня (-1 и -2) целые.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов. Правильный ответ с примером трехчлена, но без обоснования или с неверным обоснованием того, что все коэффициенты не могут быть простыми — 2 балла. Только доказательство невозможности трех простых коэффициентов — 4 балла.

11.2. Разность рациональных чисел также рациональна. Поэтому число $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ рационально. Но число $a+b$ рационально и не равно 0, поэтому и число $a-b$ рационально. Но тогда и числа $a = \dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}$ и $b = \dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}$ рациональны.

11.3. **Ответ.** Не могло.

Если у каждого человека количество друзей отличалось от количества врагов ровно на 3, то общее количество его знакомых (сумма количеств друзей и врагов) среди собравшихся будет нечётным. Однако ситуация, в которой у каждого из 17 человек будет нечётное количество знакомых, невозможна. Действительно, посчитаем количество знакомств. Для этого нужно сложить количество знакомых каждого человека и результат разделить на 2 (так как в каждом знакомстве участвует два человека). Однако сумма 17 нечётных чисел будет нечётна и на два не делится. Поэтому описываемая в условии задачи ситуация невозможна.

Комментарий. Ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов. Разрешается использовать без доказательства лемму о том, что в любой компании количество людей с нечетным числом знакомых четно.

11.4. Пусть $SA_1A_2A_3A_4$ — данная пирамида, и вписанная в основание окружность касается сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках K_1, K_2, K_3, K_4; тогда $A_1K_4 = A_1K_1$, $A_2K_1 = A_2K_2$, $A_3K_2 = A_3K_3$, $A_4K_3 = A_4K_4$. Предположим, что точки K_1, K_2, K_3 являются основаниями биссектрис в треугольниках SA_1A_2, SA_2A_3, SA_3A_4. Тогда по свойству биссектрисы треугольника имеем $\frac{A_1K_1}{A_2K_1} = \frac{A_1S}{A_2S}$, $\frac{A_2K_2}{A_3K_2} = \frac{A_2S}{A_3S}$, $\frac{A_3K_3}{A_4K_3} = \frac{A_3S}{A_4S}$. Перемножая полученные равенства, получаем с учетом равенства отрезков касательных

$$\frac{A_1S}{A_4S} = \frac{A_1S}{A_2S}\cdot\frac{A_2S}{A_3S}\cdot\frac{A_3S}{A_4S} = \frac{A_1K_1}{A_2K_1}\cdot\frac{A_2K_2}{A_3K_2}\cdot\frac{A_3K_3}{A_4K_3} =$$
$$= \frac{A_1K_4\cdot A_2K_1\cdot A_3K_2}{A_2K_1\cdot A_3K_2\cdot A_4K_3} = \frac{A_1K_4}{A_4K_3} = \frac{A_1K_4}{A_4K_4}.$$

Итак, $\frac{A_1S}{A_4S} = \frac{A_1K_4}{A_4K_4}$, что и означает, что SK_4 является биссектрисой в треугольнике SA_1A_4.

11.5. **Ответ.** Не могут.

Пусть эти неравенства выполнены; можно считать, что $|x| \leqslant |y|$. Тогда $4 < |xy| \leqslant |y|^2$, откуда $|y| > 2$. Значит, $y^2 > 4$, поэтому $x = (x+y^2) - y^2 < -2$. Отсюда $|y| \geqslant |x| > 2$, и $2 > x + y^2 = y^2 - |x| \geqslant y^2 - |y| = |y|(|y|-1) > 2(2-1) = 2$. Противоречие.

Комментарий. Правильный ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов. Правильно разобран только случай, когда $x, y > 0$ — 2 балла. Правильно разобран только случай, когда $x, y < 0$ — 5 баллов.